ÁLGEBRA LINEAL II

Soluciones a la práctica 4.2

Cuádricas

(Curso 2011–2012)

NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el espacio afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.

1.– *Clasificar y esbozar un dibujo de la cuádrica*

$$2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0.$$

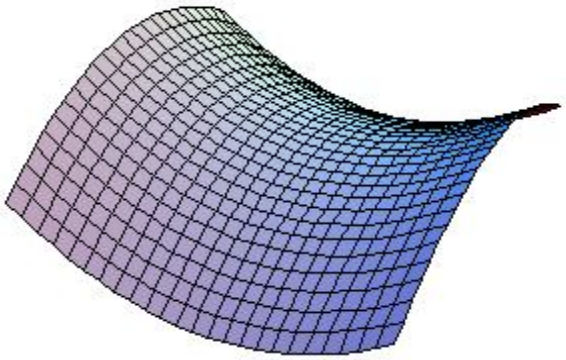
La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -3 & 5 & 1/2 & -31 \end{pmatrix}.$$

Hacemos transformaciones por congruencia para clasificarla:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & 5 & 1/2 & -31 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 4 & 1/2 & -33 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que no podemos seguir diagonalizando sin utilizar la cuarta fila. Se trata por tanto de una cuádrica de tipo parabólico. Como el determinante de $|A|$ es no nulo y la signatura de T es $(+,-,0)$, se trata de un paraboloide hiperbólico.



(Examen extraordinario, diciembre 2006)

2.– *Clasificar la cuádrica de ecuación:*

$$5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 6yz + 2x + 4y - 6z + 1 = 0.$$

Escribimos la matriz asociada a la cuádrica y la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que la última fila no puede ser sumada a las demás, ni multiplicada por un número, ni cambiada de posición.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9/2 \\ 0 & 0 & 9/2 & -21/4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura es $(+,+,-;-)$ y por tanto se trata de un hiperboloide de una hoja.

3.– Escribir la ecuación de:

(a) *una cuádrica no degenerada que no contenga elipses.*

Un parabololide hiperbólico:

$$x^2 - y^2 - 2z = 0.$$

(b) *una cuádrica no degenerada que contenga elipses e infinitas rectas.*

Un hiperboloide de una hoja:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

(c) *una cuádrica que contenga elipses, parábolas e hipérbolas.*

Un cono real:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

4.– *Consideramos la familia de cuádricas de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$Q_{\alpha,\beta} : x^2 + \alpha z^2 + 2\beta x + 2\beta y + 2\beta z = 0$$

Clasificar en función de α *y* β *las diferentes cuádricas que pueden aparecer.*

Las matrices asociadas a estás cuádricas son:

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarlas la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, ni sumada a las demás, ni multiplicada por un número:

$$A_{\alpha,\beta} \overset{\substack{H_{41}(-\beta) \\ \nu_{41}(-\beta)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \beta & -\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Si $\beta \neq 0$ no se puede diagonalizar. El tipo de cuádrica depende de la signatura de la matriz de términos cuadráticos:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Donde:

- Si $\alpha > 0$, la signatura de T es $(+,+,0)$ y se trata de un paraboloide elíptico.

- Si $\alpha = 0$, la signatura de T es $(+,0,0)$ y se trata de un cilindro parabólico.

- Si $\alpha < 0$, la signatura de T es $(+,-,0)$ y se trata de un paraboloide hiperbólico.

Si $\beta = 0$, la matriz $A_{\alpha,0}$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

- Si $\alpha > 0$ se trata de dos planos imaginarios cortándose en una recta real.

- Si $\alpha = 0$ se trata de un plano doble.

- Si $\alpha < 0$ se trata de dos planos reales cortándose en una recta.

Resumimos la clasificación en la siguiente tabla:

	$\beta = 0$	$\beta \neq 0$
$\alpha > 0$	Paraboloide elíptico	Planos imaginarios secantes
$\alpha = 0$	Cilindro parabólico	Plano doble
$\alpha < 0$	Paraboloide hiperbólico	Planos reales secantes

(Examen final, diciembre 2005)

5.– *En el espacio euclídeo y respecto de una referencia rectangular, se consideran las cuádricas que admiten por ecuaciones:*

$$x^2 - 2y^2 + az^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0, \qquad con \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificar dichas cuádricas según los distintos valores de a.

Escribimos la matriz asociada y la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que la última fila no puede ser movida ni sumada a las demás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{H_{31}(1)\ \ \mu_{31}(1) \\ H_{41}(-1)\mu_{41}(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1/2)\mu_{32}(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1/2$ se puede seguir diagonalizando:

$$\overset{H_{32}(-1/(a-1/2))\mu_{32}(-1/(a-1/2))}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(a-1/2) \end{pmatrix}$$

Vemos como varían los signos de los términos de la diagonal:

- Si $a < 1/2$, entonces los signos son $(+,-,-;+)$ o equivalentemente $(+,+,-;-)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.

- Si $a > 1/2$, entonces los signos son $(+,+,-;-)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.

- Si $a = 1/2$, no se puede seguir diagonalizando. La signatura de la matriz de términos cuadráticos es $(+,-,0)$. Se trata de un paraboloide hiperbólico.

(Examen final, septiembre 2006)

6.– *En el espacio afín y con respecto a una referencia rectangular se consideran las cuádricas de ecuaciones:*

$$ax^2 + (1-a)y^2 + az^2 + 2(1-a)xz + 2x + 2z + 3 = 0,$$

con $a \in \mathbb{R}$. Clasificar las cuádricas en función del parámetro a.

La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla hacemos congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser movida ni sumada a las demás.

$$A \xrightarrow{H_{12}}\xrightarrow{\nu_{12}} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)}\xrightarrow{\nu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}}\xrightarrow{\nu_{23}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1/2)H_{42}(-1)}\xrightarrow{\mu_{32}(-1/2)\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Distinguimos los distintos casos dependiendo de los valores de a para los cuales los términos de la diagonal se anulan:

- Si $a < 1/2$ entonces la signatura es $(+,+,-;+)$. Se trata de un hiperboloide de dos hojas.

- Si $a = 1/2$ entonces la signatura es $(+,+,0;+)$. Se trata de un cilindro imaginario.

- Si $1/2 < a < 1$ entonces la signtaura es $(+,+,+;+)$. Se trata de una elipse imaginaria.

- Si $a = 1$ entonces la signatura es $(+,+,0;+)$. Se trata de un cilindro imaginario.

- Si $a > 1$ entonces la signatura es $(+,+,-;+)$. Se trata de un hiperboloide de dos hojas.

7.– *Clasificar, en función del parámetro λ, la cuádrica:*

$$(4-\lambda)x^2 + 2y^2 - \lambda z^2 + 4xy + 2\lambda xz + 4x - 4z - \lambda = 0.$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Intentamos diagonalizarla por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, ni multiplicada por un número, ni sumada a las demás:

$$A \xrightarrow{H_{12}}\xrightarrow{\nu_{12}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)}\xrightarrow{\nu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}}\xrightarrow{\nu_{23}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)}\xrightarrow{\nu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}}\xrightarrow{\nu_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda \neq 0$ seguimos así:

$$\xrightarrow{H_{42}(-2/\lambda)}\xrightarrow{\nu_{42}(-2/\lambda)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda + 4/\lambda \end{pmatrix}$$

Los términos de la diagonal se anulan en $\lambda = -2, 0, 2$.

Distinguimos los siguientes casos:

- Si $\lambda < -2$ la signatura es $(+,+,+;+)$. Se trata de un elipsoide imaginario.

- Si $\lambda = -2$ la signatura es $(+,+,+;0)$. Se trata de un cono imaginario.

- Si $-2 < \lambda < 0$ la signatura es $(+,+,+;-)$. Se trata de un elipsoide real.

- Si $\lambda = 0$, la matriz nos queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

No podemos seguir diagonalizando. La signatura de la matriz T de términos cuadráticos es $(+,+,0)$ y se trata por tanto de un paraboloide elíptico.

- Si $0 < \lambda < 2$ la signatura es $(+,+,-;+)$. Se trata de un hiperboloide de dos hojas.

- Si $\lambda = 2$ la signatura es $(+,+,-;0)$. Se trata de un cono real.

- Si $\lambda > 2$ la signatura es $(+,+,-;-)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.