ÁLGEBRA LINEAL II — Soluciones a la Práctica 4.1

Cónicas (Curso 2023–2024)

NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el plano afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.

1.– *En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular se considera la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y = 0$$

Calcular la ecuación de las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(-1, -3)$.

La matriz asociada a la cónica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la recta polar del punto $(-1, -3)$:

$$(-1, -3, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \iff x = 0$$

El corte de esta recta con la cónica son los puntos de tangencia de las rectas buscadas:

$$y^2 + 2y = 0 \qquad y = -2 \text{ ó } y = 0.$$

Los puntos de tangencia son $(0, 0)$ y $(0, -2)$. Las rectas tangentes son las polares de dichos puntos:

$$(0, 0, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \iff -3x + y = 0,$$

y

$$(0, -2, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \iff x - y - 2 = 0.$$

2.– *En el plano afín dada la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 1 = 0$$

(i) Clasificar la cónica.

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $det(A) = -4$ y $det(T) = 0$. Se trata por tanto de una parábola.

(ii) *Hallar su centro, ejes, vértices y asíntotas.*

Dado que es una parábola no tiene ni centro ni asíntotas.

El eje es la recta polar del autovector asociado al autovalor no nulo de T.

El polinomio característico de T es:

$$|T - \lambda Id| = (1-\lambda)^2 - 1^2 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Por tanto el autovalor no nulo es $\lambda_1 = 2$. Sus autovectores asociados verifican

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x - y = 0$$

Por tanto $S_2 = \mathcal{L}\{(1,-1)\}$.

El eje será la recta polar del vector $(1,-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 2y + 2 = 0 \iff x - y + 1 = 0.$$

El vértice es la intersección del eje y de la cónica. Resolvemos el sistema formado por sus respectivas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación $y = x + 1$. Sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2 + 4x + 1 &= 0 \\ x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 + 2x + 1 + 4x + 1 &= 0 \\ 4x + 2 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

e $y = x + 1 = \dfrac{1}{2}$.

El vértice resulta $V = (-1/2, 1/2)$.

(iii) *Calcular su ecuación reducida, excentricidad y distancia del vértice al foco.*

Por ser una parábola la excentricidad es $e = 1$.

La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 - 2cy'' = 0 \iff 2x''^2 - 2cy'' = 0,$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{-|A|}{\lambda_1}} = \sqrt{2}.$$

La ecuación reducida queda:

$$x''^2 - \sqrt{2}y'' = 0. \qquad (*)$$

Ahora sabemos que cuando está expresada de la forma $x^2 = 2py$ el foco está en el punto $(0, p/2)$ y el vértice en el origen. Por tanto la distancia focal es $p/2$. En nuestro caso si reescribimos:

$$x''^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}y'' = 0,$$

vemos que $p = \sqrt{2}/2$ y así la distancia del vértice al foco es $p/2 = \sqrt{2}/4$.

3.– *Se considera la cónica dada por la ecuación:*

$$3y^2 - 4xy + 12x - 14y + 19 = 0$$

a) *Hallar las asíntotas.*

La matriz asociada y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & -7 \\ 6 & -7 & 19 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos las direcciones asintóticas. Son los vectores (x, y) cumpliendo:

$$(x, y)T(x, y)^t = 0 \iff 3y^2 - 4xy = 0 \iff y(3y - 4x) = 0.$$

Obtenemos las direcciones dadas por los vectores $(1, 0)$ y $(3, 4)$. Las asíntotas son sus rectas polares:

$$(1, 0, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad -2y + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

$$(3, 4, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad -8x + 6y - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 3y + 5 = 0$$

c) *Calcular las tangentes exteriores a la cónica pasando por el punto* $(0, 3)$.

Calculamos la recta polar del punto dado. Esta corta a la cónica en los puntos de tangencias de las tangentes pedidas. Luego uniremos esos puntos de cortes con el punto inicial.

La recta polar es:

$$(0, 3, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

Cortamos con la ecuación de la hipérbola:

$$3 - 4x + 12x - 14 + 19 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Obtenemos un único punto de corte $(-1, 1)$. La recta pedida es la que une dicho punto con el $(0, 3)$:

$$\frac{x - 0}{-1 - 0} = \frac{y - 3}{1 - 3} \iff 2x - y + 3 = 0.$$

Observación: Aparece una sola tangente exterior, porque el punto dado está sobre la asíntota $y = 3$. La otra "tangente" exterior sería la propia asíntota.

4-5.– *Para las siguientes cónicas*

(1) $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0$

(2) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 6 = 0$

(3) $6y^2 + 8xy - 8x + 4y - 8 = 0$

(4) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 = 0$

(5) $x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0$

(6) $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

(7) $x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 2 = 0$

(8) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6y = 0$

(9) $4x^2 + 4y^2 + 8xy + 4x + 4y + 1 = 0,$

se pide:

(a) *Clasificarlas sin hallar las ecuaciones reducidas.*

Estudiamos los determinantes de la de términos cuadráticos T y la matriz asociada A en cada caso.

(1) Se tiene que $det(A) = -16, \qquad det(T) = 8$ y por tanto se trata de una elipse real.

(2) $det(T) = 6 > 0$ y $det(A) = 6 > 0$. Entonces dado que el término en x^2 es positivo, se trata de una elipse imaginaria.

(3) $det(T) = -16 < 0$ y $det(A) = -32 < 0$. Se trata de una hipérbola.

(4) $det(T) = 0$ y $det(A) = 0$. Entonces se trata de dos rectas. Diagonalizando la matriz asociada queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y vemos que se trata de dos rectas imaginarias paralelas ($x'^2 + 4 = 0$).

(5) $det(T) = -9/4 < 0$ y $det(A) = 0$. Se trata de dos rectas reales que se cortan.

(6) $det(T) = 1 > 0$ y $det(A) = 0$. Se trata de dos rectas imaginarias que se cortan.

(7) $det(T) = 0$ y $det(A) = 0$. Se trata de dos rectas. Diagonalizando la matriz asociada queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7/3 \end{pmatrix}$$

por lo que se trata de dos rectas reales paralelas ($x'^2 - 7/3 = 0$).

(8) $det(T) = 0$ y $det(A) = -9 < 0$. Se trata de una parábola.

(9) $det(T) = 0$, $det(A) = 0$. Se trata de dos rectas. Diagonalizando queda:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

una recta doble ($4x'^2 = 0$).

(b) *Dar las ecuaciones reducidas de las no degeneradas y las rectas que forman las degeneradas.*

1

Las matrices asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$det(A) = -16, \qquad det(T) = 8$$

y por tanto se trata de una elipse real.

Para hallar la ecuación reducida calculamos los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = (3-\lambda)^2 - 1^2 = (2-\lambda)(4-\lambda)$$

de manera que los autovalores (las raíces del polinomio característico quedan):

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 4.$$

La forma reducida es:

$$2x'^2 + 4y'^2 + d = 0$$

con
$$d = \frac{det(A)}{\lambda_1\lambda_2}) = \frac{-16}{8} = -2.$$

Queda:
$$2x'^2 + 4y'^2 - 2 = 0 \iff x'^2 + 2y'^2 - 1 = 0$$

o en forma canónica:
$$\frac{x'^2}{1^2} + \frac{y'^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1.$$

(2) Se trata de una elipse imaginaria. Como antes calculamos los autovalores de la matriz T de términos cuadráticos:
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = 2 \text{ ó } \lambda = 3$$

Para hallar el término independiente procedemos como en el apartado anterior:
$$\lambda_3 = \frac{det(A)}{det(T)} = \frac{6}{6} = 1$$

La ecuación reducida queda:
$$2x'^2 + 3y'^2 + 1 = 0 \qquad \iff \qquad \frac{x'^2}{1/2} + \frac{y'^2}{1/3} = -1$$

(3) Ahora es una hipérbola. Pero el métdo es el mismo. Podemos simplificar primero la ecuación:
$$6y^2 + 8xy - 8x + 4y - 8 = 0 \iff 3y^2 + 4xy - 4x + 2y - 4 = 0$$

Calculamos los autovalores de T:
$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = 4 \text{ ó } \lambda = -1$$

Ahora calculamos el término independiente:
$$\lambda_3 = \frac{det(A)}{det(T)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

La ecuación reducida queda:
$$-x'^2 + 4y'^2 + 1 = 0 \qquad \iff \qquad x'^2 - \frac{y'^2}{1/4} = 1$$

Observación: En el caso de la hipérbola hacemos que el autovalor cuyo signo sea el mismo que el del determinante de la matriz asociada, vaya acompañando al término x'^2. De esta forma los focos estarán situados sobre el eje $O'X'$.

(4) Se trata de dos rectas imaginarias paralelas. En el apartado anterior hemos diagonalizado la matriz asociada de manera que obtenemos la ecuación:
$$x'^2 + 4 = 0 \iff (x' - 2\imath)(x' + 2\imath) = 0 \iff x' - 2\imath = 0 \text{ ó } x' + 2\imath = 0$$

Si nos fijamos en las operaciones elementales que hemos realizado vemos que la matriz de cambio de referencia es:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

por tanto deshaciendo el cambio queda que las rectas tienen por ecuaciones:

$$x - 2y - 2\imath = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2y + 2\imath = 0$$

(5) Se trata de dos rectas que se cortan. Como antes podemos diagonalizar la matriz asociada, hallar las rectas en la nueva referencia y luego deshacer el cambio. Pero usaremos otro método. Calculamos el centro, que corresponde a la intersección de ambas rectas. Luego calculamos la intersección de una recta arbritaria con la cónica y obtenemos un punto más de cada una de las rectas que la forman.

Primero el centro:

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y/2 + 1/2 = 0 \\ x/2 - 2y - 1/2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = -1/3$$

Vemos que es el punto $(-1/3, -1/3)$.

Ahora tomamos la recta $x = 0$ y la intersecamos con la cónica. Queda

$$-2y^2 - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ ó } y = -1/2,$$

luego la intersección son los puntos $(0, 0)$ y $(0, -1/2)$. La rectas buscadas son las que unen el centro con cada una de estos puntos:

$$\frac{x-0}{-1/3-0} = \frac{y-0}{-1/3-0} \iff x - y = 0$$
$$\frac{x-0}{-1/3-0} = \frac{y+1/2}{-1/3+1/2} \iff x + 2y + 1 = 0$$

Podemos comprobar que la ecuación de la cónica es precisamente $(x - y)(x + 2y + 1) = 0$.

(6) Se trata de dos rectas imaginarias que se cortan. Podemos proceder como en el caso anterior. Simplemente hay que tener en cuenta que ahora trabajaremos con números complejos.

Calculamos el centro:

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (0,0,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (-2, 0)$$

Intersecamos la recta $x = 0$ con la cónica:

$$y^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (0, 2\imath) \text{ ó } (x, y) = (0, -2\imath)$$

Ahora calculamos las rectas que unen estos puntos con la cónica:

$$\frac{x+2}{0+2} = \frac{y-0}{2\imath-0} \iff x + \imath y + 2 = 0$$
$$\frac{x+2}{0+2} = \frac{y-0}{-2\imath-0} \iff x - \imath y + 2 = 0$$

De nuevo podemos ver que la ecuación de la cónica es $(x + \imath y + 2)(x - \imath y + 2) = 0$

(7) Se trata de dos rectas reales paralelas. Podemos actuar como en el caso (4). Pero usemos otro método. Aquí sabemos que hay una recta de centros cuya dirección es la de las rectas que buscamos:

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -2 \end{pmatrix} = (0,0,t) \quad \Rightarrow \quad x + y - 1/2 = 0$$

Por tanto dichas rectas son de la forma $x + y + a = 0$.

Calculamos la intersección de la cónica con una recta arbritaria, p.ej., $x = 0$. Obtenemos:

$$y^2 - y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \text{ ó } y = -1$$

Por tanto las rectas contienen respectivamente a los puntos $(0, 2)$ y $(0, 1)$. Son por tanto:

$$\begin{aligned} x + y - 2 &= 0 \\ x + y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Una vez más podemos comprobar que la ecuación de la cónica es $(x + y - 2)(x + y + 1) = 0$.

(8) Se trata de una parábola. Recordemos que, en su forma reducida $ax^2 + 2by = 0$, la matriz asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

donde a es el autovalor no nulo de la matriz T y $det(A') = det(A)$. Por tanto calculamos los autovalores de T:

$$det(T - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 5$$

y además:

$$-9 = det(A) = det(A') = -ab^2 = -5b^2 \quad \Rightarrow \quad b = \pm 3\sqrt{5}/5$$

Por tanto la ecuación reducida queda:

$$5x^2 - \frac{6\sqrt{5}}{5} y = 0$$

(9) Se trata de una recta doble. Necesariamente la ecuación es de la forma

$$(ax + by + c)^2 = 0 \iff a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + 2acx + 2acy + c^2 = 0.$$

Comparando con la ecuación que tenemos, deducimos que la recta es:

$$2x + 2y + 1 = 0$$

También podemos calcular la recta doble teniendo en cuenta que corresponde a recta de centros, es decir, viene dada por la ecuación:

$$(x, y, 1)A = 0$$

Nos quedan tres ecuaciones dependientes. Tomando una sóla de ellas queda:

$$4x + 4y + 2 = 0 \iff 2x + 2y + 1 = 0$$

(c) *En los casos en que existan, determinar: centros, puntos singulares, direcciones asintóticas, asíntotas, ejes, vértices, focos, directrices y excentricidad.*

Los puntos singulares sólo aparecen cuando la cónica está formada por dos rectas que se cortan (el punto singular es la intersección) o por dos rectas coincidentes (el lugar singular es la propia recta). En esos casos ya hemos hallado dichos puntos y los centros.

(1) El centro es el punto (a, b) verificando:

$$(a, b, 1)A = (0, 0, h) \iff 3a + b - 2 = 0, \quad a + 3b - 2 = 0.$$

resolviendo obtenemos el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de t asociados a autovalores no nulos.

Hallamos los autovectores:

- Asociados a $\lambda_1 = 2$:

$$(T - 2Id)(x,y)^t = 0 \iff (x,y) \in \mathcal{L}\{(1,-1)\}.$$

- Asociados a $\lambda_4 = 4$:

$$(T - 4Id)(x,y)^t = 0 \iff (x,y) \in \mathcal{L}\{(1,1)\}.$$

Los ejes quedan:

$$\begin{aligned} (1,-1,0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff 2x - 2y = 0 \iff x - y = 0 \\ (1,1,0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff 4x + 4y - 4 = 0 \iff x + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Los vértices son la intersección de los ejes con la cónica.

Intersecamos el primer eje:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

resolviendo obtenemos $V_1 = (0,0)$, $V_2 = (1,1)$.

Intersecamos el segundo eje:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

resolviendo obtenemos $V_3 = (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$, $V_4 = (\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$.

Los focos en la nueva referencia son $(c,0)$ y $(-c,0)$ con:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2.$$

La ecuación de cambio de referencia es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{centro} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{autovectores \quad de \quad T \quad normalizados} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Cambiamos los focos de referencia mediante esa ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

es decir los focos son los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.

Finalmente la excentricidad es:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}/2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) Vimos que se trata de una elipse imaginaria.

El centro se calcula como en cualquier otra cónica:

$$(a,b,1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (0,0,t) \iff \begin{cases} 2a - 2 = 0 \\ 3b + 3 = 0 \end{cases} \iff (a,b) = (1,-1)$$

No tiene puntos singulares, ni asíntotas.

Los ejes corresponden de nuevo a los conjugados de las direcciones de los autovectores de T:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \text{ ó } \lambda = 3$$

Los autovectores son respectivamente $(1,0)$ y $(0,1)$. Por tanto los ejes quedan:

$$(1,0,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff 2x - 2 = 0$$
$$(0,1,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff 3y + 3 = 0$$

Lo demás no tiene sentido calcularlo, por ser una elipse imaginaria.

(3) Se trata ahora de una hipérbola. Procedemos como antes. La ecuación reducida vimos que era:

$$-x'^2 + 4y'^2 + 1 = 0 \qquad \iff \qquad x'^2 - \frac{y'^2}{1/4} = 1$$

Calculamos los autovectores de T y el centro para escribir el cambio de referencia.

Autovalor asociado a -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x + 2y = 0$$

El autovalor normalizado es $(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Autovalor asociado a 4:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = 0$$

El autovalor normalizado es $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

El centro es:

$$(x,y,1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = (0,0,t) \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (-2,1)$$

Las direcciones asíntoticas corresponden a la intersección de la cónica con los puntos del infinito:

$$(x,y,0)A(x,y,0)^t = 0 \iff 6y^2 + 8xy = 0 \iff y = 0 \text{ ó } 4x + 3y = 0 \iff (1,0) \text{ ó } (-3,4)$$

Las asíntotas son las rectas polares de tales direcciones:

$$(1,0,0)A(x,y,0)^t = 0 \iff 2y - 2 = 0 \iff y - 1 = 0$$

y

$$(-3,4,0)A(x,y,0)^t = 0 \iff 8x + 6y + 10 = 0 \iff 4x + 3y + 5 = 0$$

- Los ejes corresponden a las rectas polares de los autovectores:

$$(2,-1,0) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -2x + y - 5 = 0$$
$$(1,2,0) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 4x + 8y = 0$$

- Los vértices los hallamos intersecando los ejes con la cónica. En concreto sólo uno de los ejes corta a la hipérbola y si hemos ordenado los autovalores poniendo de primero el que tiene el mismo signo que $|A|$, el eje que corta a los vértices es la recta polar del segundo autovector. Queda: $(2/\sqrt{5}-2, -1/\sqrt{5}+1)$ y $(-2/\sqrt{5}-2, 1/\sqrt{5}+1)$.

Ahora el cambio de referencia es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- Para hallar los focos sabemos que en la nueva refrencia son $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, donde $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $a = 1$ y $b = 1/2$. Quedan $(\sqrt{5}/2, 0)$ y $(-\sqrt{5}/2, 0)$. Usando las fórmulas de cambio de referencia, obtenemos: $(-1, 1/2)$ y $(-3, 3/2)$.

- Las directrices son las rectas polares de los focos:

$$(-1, 1/2, 1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x + y/2 - 3/2 = 0$$
$$(-3, 3/2, 1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y/2 + 7/2 = 0$$

- La excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(4) Vimos que se trataba de dos rectas paralelas imaginarias.

Sabemos que hay una recta de centros:

$$(x, y, 1)A = (0, 0, h) \iff x - 2y = 0$$

No hay puntos singulares (reales) porque de hecho las rectas son imaginarias. Si los habría si trabajásemos con el plano afín imaginario.

El eje corresponde al conjugado de la dirección del autovector asociado al autovalor no nulo de T:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 5$$

El autovalor asociado a 5 es el $(-1, 2)$. Por tanto el eje es:

$$(-1, 2, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \iff -5x + 10y = 0$$

Todo lo demás no tiene sentido calcularlo en este caso.

(5) Vimos que se tratan de dos rectas reales que se cortan.

El centro ya lo hemos calculado $(-1/3, -1/3)$.

El único puntos singular es precisamente la intersección de las dos rectas, es decir, el centro.

Las asíntotas son las dos rectas.

Los ejes corresponden a las bisectrices de dichas rectas. En cualquier caso los calculamos como siempre: tomando los conjugados de las direcciones que marcan los autovectores de T.

Obtenemos que los autovalores son:

$$\frac{-1+\sqrt{10}}{2} \text{ y } \frac{-1-\sqrt{10}}{2}$$

y los correspondientes autovectores:

$$(-1, 3+\sqrt{10}) \text{ y } (3+\sqrt{10}, 1)$$

Por tanto los ejes quedan:

$$\begin{aligned}
(-1, 3+\sqrt{10}, 0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff -x + (3+\sqrt{10})y + \frac{2+\sqrt{10}}{3} = 0 \\
(3+\sqrt{10}, 1, 0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff (3+\sqrt{10})x + y + \frac{4+\sqrt{10}}{3} = 0
\end{aligned}$$

(6) Vimos que eran dos rectas imaginarias que se cortan:

El centro ya lo hemos calculado:

$$(-2, 0)$$

El único punto singular es el centro.

Los ejes de nuevo son los conjugados de los autovectores de T.

Dichos autovectores son $(1,0)$ y $(0,1)$ y por tanto los ejes:

$$\begin{aligned}
(1,0,0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff x + 2 = 0 \\
(0,1,0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff y = 0
\end{aligned}$$

(7) Se trata de dos rectas reales paralelas.

Hay una recta de centros que ya hemos calculado:

$$x + y - 1/2 = 0$$

No hay puntos singulares (propios).

Las direcciones asintóticas son las de las rectas.

El eje coincide en este caso con la recta de centros.

(8) Se trata de una parábola. Vimos que la forma reducida era

$$5x^2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}y = 0 \iff x^2 = 2\frac{3\sqrt{5}}{25}y$$

En este caso (por ser una parábola) no tiene centro. Ahora, el vector traslación del cambio de referencia corresponde al vértice de la parábola. Por lo demás procedemos como en los casos anteriores:

Autovalor asociado a 5:

$$(x,y)\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y = 0$$

El autovalor normalizado es $(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

Autovalor asociado a 0:

$$(x,y)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2y = 0$$

El autovalor normalizado es $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Observación: Para que la parábola este orientada sobre el eje OY' positivo comprobamos que hemos escogido la orientación correcta del autovalor asociado al 0. El signo del coeficiente de y' en la expresión $\lambda_1 x'^2 - 2cy' = 0$ es:

$$(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})(0,3)^t = 3/\sqrt{5} > 0$$

luego en lugar del vector $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ tomamos el vector $(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Ahora calculamos el eje. Corresponde al conjugado del autovector asociado al autovalor no nulo:

$$(1,-2,0)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 5x-10y-6=0$$

El vértice es la intersección de este eje con la cónica:

$$\left(\frac{10y+6}{5}\right)^2 + 4y^2 - 4y\left(\frac{10y+6}{5}\right) + 6y = 0$$

Resulta el punto $(18/25, -6/25)$

Las fórmulas de cambio de referencia son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/25 \\ -6/25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Además:

- Por ser una parábola, no tiene centro.

- Las direcciones asíntoticas corresponde a la intersección de la cónica con los puntos del infinito:

$$(x,y,0)A(x,y,0)^t = 0 \iff x^2+4y^2-4xy=0 \iff (x-2y)^2=0 \iff (2,1)$$

(en realidad sabemos que es la dirección correspondiente al autovector asociado al 0).

- El foco en la nueva referencia es $(0, p/2)$, donde $p = (3\sqrt{5}/5)/5$. Queda $(0, 3\sqrt{5}/50)$. Si lo cambiamos a la original con la fórmula de cambio de referencia resulta: $(3/5, -3/10)$.

- La directriz es la recta polar del foco:

$$(3/5, -3/10, 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 12x+6y-9=0$$

- La excentricidad, para una parábola siempre es 1.

(9) Se trata de una recta doble real.

La recta de centros, los puntos singulares, asíntotas y el eje coinciden con la propia recta, que ya hemos caclulado antes.

6.– *En el plano afín dada la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0$$

(i) *Clasificar la cónica y dar su ecuación reducida canónica.*

Clasificamos la cónica en función del determinante de la matriz asociada A y la de términos cuadráticos T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$det(A) = -9, \qquad det(T) = 0.$$

Se trata de una parábola.

La ecuación reducida es de la forma $\lambda x'^2 - 2dy' = 0$, donde λ es el autovalor no nulo de T y $d = \sqrt{-|A|/\lambda}$. Dado que la suma de los autovalores de T es su traza y por ser una parábola uno de los autovalores es cero, se tiene que:

$$\lambda + 0 = traza(T) = 5, \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 5.$$

y

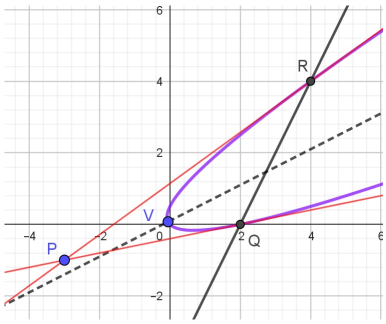
$$d = \sqrt{9/5} = 3\sqrt{5}/5.$$

La ecuación reducida queda:

$$5x'^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} y' = 0$$

y la reducida canónica:

$$x'^2 = 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{25} y'$$



(ii) *Hallar el centro, sus asíntotas, ejes, vértices y excentricidad.*

Como es una parábola no tiene centro ni asínotas y la excentricidad es 1.

El único eje es la recta polar del autovector asociado al autovalor no nulo. Calculamos el autovector:

$$(T - 5Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x - y = 0.$$

Tomamos un vector verificando la ecuación, por ejemplo: $(1, -2)$.

El eje queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 5x - 10y + 1 = 0.$$

El vértice se obtiene intersecando el eje con la cónica:

$$\begin{aligned} &5x - 10y + 1 = 0 \\ &x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $x = 2y - 1/5$. Sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned} &4y^2 + 1/25 - 4y/5 - 8y^2 + 4y/5 + 4y^2 - 4y + 2/5 - 2y = 0 \\ &-6y + 11/25 = 0 \\ &y = 11/150 \end{aligned}$$

y entonces $x = 2y - 1/5 = 22/150 - 1/5 = -8/150 = -4/75$.

El vértice queda $V = (-4/75, 11/150)$.

(iii) *Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto* $(-3, -1)$.

Primero comprobamos si el punto pertenece a la cónica, viendo si satisface o no su ecuación:

$$(-3)^2 - 4(-3)(-1) + 4(-1)^2 - 2(-3) - 2(-1) = 9 \neq 0$$

No pertenece a la cónica. Entonces calcularemos la recta polar por $(-3,-1)$. La intersección de ésta con la cónica nos dará los puntos de tangencia y finalmente las tangentes en tales puntos son las rectas pedidas.

La recta polar es:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -2x + y + 4 = 0 \iff 2x - y - 4 = 0$$

La intersecamos con la cónica:

$$\begin{aligned} &2x - y - 4 = 0 \\ &x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $y = 2x - 4$. Sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned} &x^2 - 8x^2 + 16x + 16x^2 - 64x + 64 - 2x - 4x + 8 = 0 \\ &9x^2 - 54x + 72 = 0 \\ &x^2 - 6x + 8 = 0 \end{aligned}$$

Queda:

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = 3 \pm 1 = 2 \text{ ó } 4$$

Los puntos de corte son por tanto $Q = (2,0)$ y $(4,4)$. Finalmente calculamos la tangente en cada uno de ellos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 5y - 2 = 0$$

y

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -5x + 7 - 8 = 0 \iff 5x - 7 + 8 = 0$$

7.– *En el plano afín para cada $k \in \mathbb{R}$, se define la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 2kxy + y^2 + 2y + 1 = 0$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.*

Las matrices asociada y de términos cuadráticos de la cónica son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}.$$

El signo de los determinantes de ambas matrices determina el tipo de cónica. Tenemos que:

$$|A| = -k^2, \qquad |T| = 1 - k^2$$

Para ver los valores de k límites de posibles cambios se signo estudiamos cuando se anulan:

$$|A| = 0 \iff -k^2 = 0 \iff k = 0, \quad \text{ y } |T| = 0 \iff 1 - k^2 = 0 \iff k = \pm 1.$$

Entonces:

k	$\|T\|$	$\|A\|$	TIPO DE CÓNICA
$k < -1$	$-$	$-$	Hipérbola.
$k = -1$	0	$-$	Parábola.
$-1 < k < 0$	$+$	$-$	Elipse.
$k = 0$	$+$	0	Rectas secantes imaginarias cortándose en punto real.
$0 < k < 1$	$+$	$-$	Elipse.
$k = 1$	0	$-$	Parábola.
$k > 1$	$-$	$-$	Hipérbola.

(ii) *Para $k = 2$ hallar el centro, los ejes y la excentricidad.*

Para $k = 2$ vimos que se trata de una hipérbola.

El centro es el punto (p, q) verificando que:

$$A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

donde h es una valor arbitrario y por tanto sólo interesan las dos primeras ecuaciones. Operando queda:

$$\begin{aligned} & p - 2q = 0 \\ & -2p + q + 1 = 0 \end{aligned}$$

y resolviendo el centro es $C = (p, q) = (2/3, 1/3)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos de T.

Comenzamos hallando los autovalores de T como raíces de su polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Resolviendo se obtienen los autovalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$.

Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = -1$:

$$(T + 1Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x - 2y = 0.$$

Queda $S_{-1} = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$.

Ahora los autovectores asociados a $\lambda_2 = 3$:

$$(T + 1Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + 2y = 0.$$

Queda $S_{-1} = \mathcal{L}\{(1, -1)\}$.

Un eje es la recta polar del autovector $(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x - y + 1 = 0 \iff x + y - 1 = 0.$$

El otro la recta polar del autovector $(1, -1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 3x - 3y - 1 = 0.$$

Para hallar la excentricidad necesitamos hallar la ecuación reducida canónica de la hipérbola:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

En ese caso sabemos que la excentricidad es $e = c/a = \sqrt{a^2 + b^2}/a$.

La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0 \qquad \text{con } d = |A|/|T|$$

(pondemos de primero el autovalor con el mismo signo que $|A|$).

En este caso nos queda:

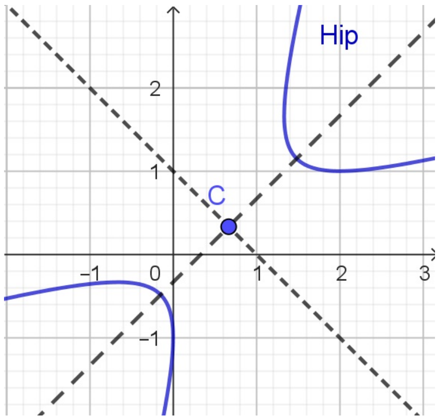
$$-x''^2 + 3y''^2 + \frac{4}{3} = 0.$$

Operamos para ponerla en la forma (*):

$$x''^2 - 3y''^2 = \frac{4}{3} \iff \frac{x''^2}{4/3} - \frac{y''^2}{4/9} = 1.$$

de donde $a^2 = 4/3$ y $b^2 = 4/9$. Entonces la excentricidad queda:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{4/3}{2/\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



(iii) *Demostrar que el eje OY es tangente a la cónica en un mismo punto P que no depende del valor de k. Hallar P.*

Intersecamos el eje OY, es decir, la recta $x = 0$ con la cónica resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de ambas. Será tangente si corta en un punto doble (la correspondiente ecuación de segundo grado tiene una única raíz).

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2kxy + y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda queda:

$$y^2 + 2y + 1 = 0.$$

De donde:

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - 1} = -1.$$

Vemos que hay una única raíz doble y así un único punto de tangencia $P = (0, -1)$.

Otra forma de argumentar (sin tener en cuenta la multipilicidad de la raíz) es comprobar que efectivamente en ese punto P la tangente a la cónica es el eje OY para cualquier valor de k. La recta tangente en el punto $P = (0, -1)$ es:

$$(\,0 \quad -1 \quad 1\,)\,A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff kx = 0$$

Si $k \neq 0$ efectivamente queda $x = 0$; si $k = 0$, queda $x = 0$. Significa que el punto $P = (0, -1)$ es un punto singular de la cónica, y que en cierto modo toda recta es tangente en ese punto. De hecho para $k = 0$ vimos que la cónica es un único punto real.

8.– *En el plano afín se considera la cónica de ecuación:*

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 = 0$$

(i) *Clasificar la cónica y hallar su ecuación reducida.* (0.6 puntos)

Para clasificar la cónica calculamos los determinantes de su matriz asociada y matriz de términos cuadráticos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde: $det(A) = -4$ y $det(T) = 0$. Se trata entonces de una parábola.

La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda x'^2 - 2dy' = 0$$

con λ el autovalor no nulo de T y $d = +\sqrt{\dfrac{-|A|}{\lambda}}$.

Calculamos los autovalores de T como raíces del polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

resultan $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$.

Entonces $d = +\sqrt{\dfrac{-|A|}{\lambda}} = +\sqrt{\dfrac{4}{2}} = \sqrt{2}$. La ecuación reducida es:

$$2x'^2 - 2\sqrt{2}y' = 0.$$

En forma canónica:

$$x'^2 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

de tal manera que el parámetro p de la parábola es $p = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(ii) *Hallar su excentricidad, asínotas, y la distancia entre un foco y el vértice más cercano a él.* (0.4 puntos)

Por ser una parábola la excentricidad es 1 y no tiene asíntotas. La distancia entre su único foco y su único vértice es $\dfrac{p}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(iii) *Calcular las tangentes a la cónica que pasan por el punto* $(-1, 2)$. (0.5 puntos)

Los puntos de tangencia de las rectas buscadas son la intersección de la recta polar de $(-1, 2)$ respecto de la cónica. Tal recta polar es:

$$(\,-1 \quad 2 \quad 1\,)\,A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x + y + 1 = 0 \iff x - y - 1 = 0.$$

Intersecamos con la cónica resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

Despejando y en la primera ecuación $y = x - 1$ y sustituyendo en la segunda:

$$x^2 + 2x(x-1) + (x-1)^2 - 4x - 1 = 0 \iff 4x^2 - 8x = 0$$

De donde:

$x = 0, \quad y = x - 1 = -1$ y obtenemos el punto $R = (0, -1)$.

$x = 2, \quad y = x - 1 = 1$ y obtenemos el punto $S = (2, 1)$.

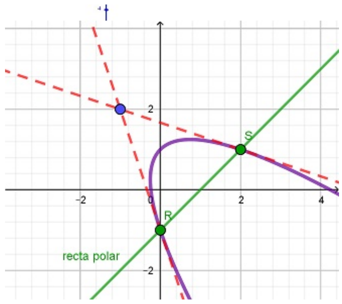
Las correspondientes tangentes son:

- En el punto $R = (0, -1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -3x - y - 1 \iff 3x - 3y + 1 = 0.$$

- En el punto $S = (2, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + 3y - 5 = 0.$$



(iv) *Calcular la ecuación de una cónica que tiene las mismas tangentes que la curva dada en los puntos* $(0, -1)$ *y* $(2, 1)$ *y pasa por el origen.* (1 punto)

Consideramos el haz de cónicas que tiene las mismas tangentes que la curva dada en los puntos $(0, -1)$ y $(2, 1)$ que son precisamente los puntos de tangencia del apartado anterior.

Para generarlo necesitamos dos cónicas que cumplan esa condición. Una puede ser la propia cónica dada y la otra la recta doble que los une, es decir, la recta polar ya calculada al cuadrado.

El haz queda:

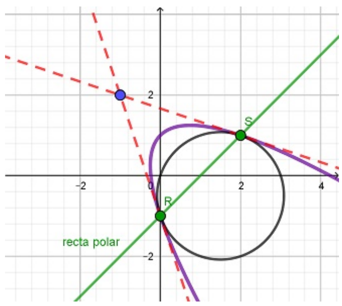
$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 + \lambda(x - y - 1)^2 = 0$$

Imponemos que la cónica buscada pasa por el origen $(0, 0)$:

$$0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0^2 - 4 \cdot 0 - 1 + \lambda(0 - 0 - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1.$$

La curva pedida queda:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 + (x - y - 1)^2 = 0 \iff 2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y = 0 \iff x^2 + y^2 - 3x + y = 0.$$



9.– *En el plano afín se considera la cónica de ecuación:*

$$x^2 + 2kxy + y^2 + 2ky = 0$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.* (0.5 puntos)

Para clasificar la cónica estudiamos los signos de los determinantes de la matriz asociada y de la matriz de términos cuadráticos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Donde $det(A) = -k^2$ y $det(T) = 1 - k^2$. Vemos donde se anulan para ver los valores de k límite en los cuáles se puede producir cambio de signo:

$$-k^2 = 0 \iff k = 0, \qquad\qquad 1 - k^2 = 0 \iff k = \pm 1.$$

Entonces queda:

k	$\|T\|$	$\|A\|$	Tipo de cónica
$k < -1$	$-$	$-$	hipérbola
$k = -1$	0	$-$	parábola
$-1 < k < 0$	$+$	$-$	elipse
$k = 0$	$+$	0	rectas imaginarias cortándose en punto real
$0 < k < 1$	$+$	$-$	elipse
$k = 1$	0	$-$	parábola
$k > 1$	$-$	$-$	hipérbola

(ii) *Para $k = 2$ y $k = -1$ hallar el centro, los ejes, las asíntotas y la excentricidad.* (1 punto)

Comenzamos con $k = 2$. Vimos que es una hipérbola. En ese caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El centro es el punto (r, s) verificando:

$$A \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \iff r + 2s = 0, \quad 2r + s + 2 = 0$$

Resolviendo queda $(r, s) = (-4/3, 2/3)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos. El polinomio característico de T es:

$$|T - \lambda Id| = (1 - \lambda)^2 - 2^2 = (3 - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Por tanto los autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$. Los autovectores quedan:

- Asociado a $\lambda_1 = -1$:

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{-1} = \mathcal{L}\{(1, -1)\}.$$

- Asociado a $\lambda_2 = 3$:

$$(T - 3Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \mathcal{L}\{(1, 1)\}.$$

Sus rectas polares son los ejes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y + 2 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 3x + 3y + 2 = 0.$$

Las asíntotas son las rectas polares de las direcciones asintóticas. Estas son vectores (p, q) cumpliendo:

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \iff p^2 + 4pq + q^2 = 0 \iff p = -2q \pm \sqrt{(2q)^2 - q^2} = (-2 \pm \sqrt{3})q$$

Tomando $q = 1$ nos quedan las direcciones asintøticas $(-2 + \sqrt{3}, 1)$ y $(-2 - \sqrt{3}, 1)$. Las asíntotas son sus correspondientes rectas polares:

$$\begin{pmatrix} -2 + \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \sqrt{3}x + (-3 + 2\sqrt{3})y + 2 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \sqrt{3}x + (3 + 2\sqrt{3})y - 2 = 0.$$

Para la excentricidad escribimos en forma reducida la hipérbola como:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d = 0, \qquad d = det(A)/det(K)$$

Tomamos como λ_1 el autovalor con el mismo signo que $det(A)$; en este caso negativo. Nos queda:

$$-x'^2 + 3y'^2 + \frac{4}{3} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{x'^2}{4/3} - \frac{y'^2}{4/9} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4/3, \quad b^2 = 4/9.$$

De donde:

$$excentricidad = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{4/3}{2/\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Para $k = -1$ sabemos que es una parábola. En ese caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La excentricidad es 1 y no tiene ni centro ni asíntotas.

El eje es la recta polar del autovector de T asociado al único autovalor no nulos de T. El polinomio característico de T es:

$$|T - \lambda Id| = (1 - \lambda)^2 - 1^2 = \lambda(\lambda - 2).$$

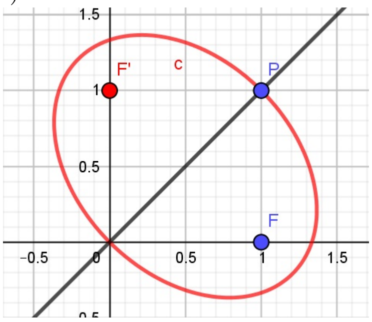
El autovalor no nulo de T es $\lambda_1 = 2$ y su autovector asociado:

$$(T - 2 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \mathcal{L}\{(1, -1)\}.$$

y su recta polar:

$$(1 \quad -1 \quad 0) \, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 2y + 1 = 0.$$

(iii) *Calcular la ecuación de una elipse que tiene un foco en el punto* $F(1,0)$*, un eje es la recta* $x - y = 0$ *y pasa por el punto* $(1,1)$. (1 punto)



Calcularemos el segundo foco F' como simétrico del primero respecto del eje. Luego usaremos la definición de elipse como lugar geométrico de puntos del plano cuya suma de distancias a los focos es constante.

Sea $F' = (x_0, y_0)$. Por ser el simétrico del primero respecto de la recta $x - y = 0$ cumple:

i) $\dfrac{F + F'}{2} \in eje \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x_0 + 1}{2} - \dfrac{y_0}{2} = 0 \iff x_0 - y_0 + 1 = 0.$

ii) $\vec{FF'} \perp eje$, es decir, $(x_0 - 1, y_0)$ es paralelo al vector normal $(1, -1)$ del eje. De ahí: $x_0 + y_0 - 1 = 0.$

Resolviendo se obtiene $F' = (x_0, y_0) = (0, 1)$.

La ecuación de la elipse es entonces:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = cte$$

Para hallar la constante imponemos que la cónica pasa por el punto dado $(1,1)$:

$$\sqrt{(1-1)^2 + 1^2} + \sqrt{1^2 + (1-1)^2} = cte \quad \Rightarrow \quad cte = 2.$$

Obtenemos:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 + x^2 + y^2 - 2y + 1 - 4\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = x - y + 2$$

Elevando de nuevo:

$$4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 = x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4$$

y simplificando:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0.$$

10.– *Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro $a \in R$:*

$$x^2 + 8xy - ay^2 - 2x - 2ay = 0$$

a) *Clasificar las cónicas en función de a.*

Las matrices asociadas a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -a & -a \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -a \end{pmatrix}.$$

Clasificamos la cónica en función de los determinantes de A y T:

$$det(A) = -a^2 - 9a = -a(a-9), \qquad det(T) = -a - 16$$

Distinguimos los casos tomando como valores límite de a aquellos en los que se anulan los determinantes y por tanto susceptibles de ser la frontera de intervalos con signos diferentes:

	$\|T\|$	$\|A\|$	Clasficación
$a < -16$	$+$	$-$	elipse
$a = -16$	0	$-$	parábola
$-16 < a < 0$	$-$	$-$	hipérbola
$a = 0$	$-$	0	rectas reales que se cortan
$0 < a < 9$	$-$	$+$	hipérbola
$a = 9$	$-$	0	rectas reales que se cortan
$a > 9$	$-$	$-$	hipérbola

b) *Para $a = -1$ hallar la distancia entre sus dos focos.*

Para $a = -1$ se trata de una hipérbola.

Calculamos su ecuación reducida de la forma:

$$\frac{x''^2}{a'^2} - \frac{y''^2}{b'^2} = 1$$

La distancia focal en ese caso será $2c' = 2\sqrt{a'^2 + b'^2}$.

Para la ecuación reducida comenzamos calculando los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 4^2 = 0 \iff (\lambda+3)(\lambda-5) = 0.$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 5$ (ponemos primero el negativo porque $det(A) = -10 < 0$). La ecuación reducida queda de la forma:

$$-3x''^2 + 5y''^2 + d = 0 \qquad \text{con } d = \frac{|A|}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3}.$$

Queda:

$$-3x''^2 + 5y''^2 + \frac{2}{3} = 0 \iff 3x''^2 - 5y''^2 = \frac{2}{3} \iff \frac{3x''^2}{2/3} - \frac{5y''^2}{2/3} = 1$$

Y finalmente:

$$\frac{x''^2}{2/9} - \frac{y''^2}{2/15} = 1.$$

La distancia focal es:

$$2\sqrt{\frac{2}{9} + \frac{2}{15}} = 2\sqrt{\frac{10+6}{45}} = \frac{8\sqrt{45}}{45} = \frac{8\sqrt{5}}{15}.$$

c) *Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.*

Los casos son $a = 0$ y $a = 9$.

Para $a = 0$ la ecuación dada queda:

$$x^2 + 8xy - 2x = 0 \iff x(x + 8y - 2) = 0$$

Las dos rectas son por tanto $x = 0$ y $x + 8y - 2 = 0$.

Para $a = 9$ la ecuación queda:

$$x^2 + 8xy - 9y^2 - 2x - 18y = 0.$$

La descomposición algebraica no es tan obvia. Procedemos de la siguiente forma:

- Calculamos el centro (p, q) de la cónica:

$$A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

donde h es cualquier valor real. Queda:

$$p + 4b - 1 = 0, \quad 4p - 9q - 9 = 0.$$

De donde $(p, q) = (9/5, -1/5)$.

- Intersecamos una recta cualquiera con la cónica. Por ejemplo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x^2 + 8xy - 9y^2 - 2x - 18y = 0 \end{array}\right\} \iff (x, y) = (0, 0) \text{ ó } (x, y) = (0, -2)$$

- Las rectas que buscamos son las que unen el centro con los dos puntos hallados:

La recta que une $(9/5, -1/5)$ y $(0, 0)$ es:

$$\frac{x - 0}{9/5} = \frac{y - 0}{-1/5} \iff x + 9y = 0.$$

La recta que une $(9/5, -1/5)$ y $(0, -2)$ es:

$$\frac{x - 0}{9/5} = \frac{y + 2}{-1/5 + 2} \iff x - y - 2 = 0.$$

11.– *Hallar las ecuaciones de*

(a) *una parábola sabiendo que pasa por los puntos $P = (0, 3)$, $Q = (2, 6)$ y tiene por eje la recta $x - y + 1 = 0$.*

Usaremos que el eje es una recta de simetría para hallar los simétricos P' y Q' de los puntos P y Q.

Después construiremos el haz de cónicas que pasan por cuatro puntos.

Finalmente del haz seleccionamos las parábolas imponiendo que la matriz de términos cuadráticos tenga determinante nulo.

Sea $P' = (a, b)$ el simétrico de $P = (0, 3)$ respecto al eje $x - y + 1 = 0$ (que tiene por vector director el $(1, 1)$).

- Se cumple que $\dfrac{P + P'}{2} \in eje$, es decir, $\dfrac{a}{2} - \dfrac{b + 3}{2} + 1 = 0$.

- El vector $\vec{P}P'$ es perpendicular al eje. Por tanto $\vec{P}P' \cdot (1,1) = 0$ es decir $a + b - 3 = 0$.

Resolviendo se obtiene $P' = (2,1)$.

Sea $Q' = (c,d)$ el simétrico de $Q = (2,6)$ respecto al eje $x - y + 1 = 0$ (que tiene por vector director el $(1,1)$).

- Se cumple que $\dfrac{Q+Q'}{2} \in eje$, es decir, $\dfrac{c+2}{2} - \dfrac{d+6}{2} + 1 = 0$.

- El vector $\vec{Q}Q'$ es perpendicular al eje. Por tanto $\vec{Q}Q' \cdot (1,1) = 0$ es decir $c - 2 + d - 6 = 0$.

Resolviendo se obtiene $Q' = (5,3)$.

Formamos ahora el haz de cónica que pasan por P, P', Q, Q'. Construimos una primera cónica con las rectas PP' y QQ:

- Recta PP', une $P = (0,3)$ y $P' = (2,1)$. Queda: $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-3}{1-3}$. Simplificando: $x + y - 3 = 0$.

- Recta QQ', une $Q = (2,6)$ y $Q' = (5,3)$. Queda: $\dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{y-6}{3-6}$. Simplificando: $x + y - 8 = 0$.

La segunda cónica con las rectas PQ' y $P'Q$.

- Recta PQ', une $P = (0,3)$ y $Q' = (5,3)$. Es $y = 3$, es decir, $y - 3 = 0$.

- Recta $P'Q$, une $P' = (2,1)$ y $Q' = (2,6)$. Es $x = 2$, es decir, $x - 2 = 0$.

El haz de cónicas queda:

$$(x + y - 3)(x + y - 8) + \lambda(x - 2)(y - 3) = 0$$

Operando:

$$x^2 + (2+\lambda)xy + y^2 - (11 + 3\lambda)x - (11 + 2\lambda y) + 24 - 6\lambda = 0.$$

La matriz de términos cuadráticos es:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & (2+\lambda)/2 \\ (2+\lambda)/2 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante es cero si:

$$1 - \left(\frac{2+\lambda}{2}\right)^2 = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = -4$$

Si $\lambda = 0$ la cónica queda $(x + y - 3)(x + y - 8) = 0$ que claramente es degenerada (producto de dos rectas) y por tanto no es una parábola.

Si $\lambda = -4$ queda:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x - 3y = 0$$

La matriz A de la cónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene determinante no nulo y por tanto es la parábola pedida.

(b) *la cónica cuyo centro es $C(1,1)$ y tal que $y = 1$ es un eje y la polar del punto $(2,2)$ es la recta $x + y - 3 = 0$.*

Dado que un eje es $y = 1$, sabemos que un autovector de la matriz T asociada tiene la dirección $(1,0)$ y el otro (perpendicular) la $(0,1)$. Por tanto la matriz de la cónica es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & e \\ d & e & c \end{pmatrix}$$

Por ser el centro el $(1,1)$ se verifica:

$$(1,1,1)A = (0,0,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + d = 0 & \Rightarrow \quad d = -a \\ b + e = 0 & \Rightarrow \quad e = -b \end{cases}$$

Ahora imponemos la condición de polaridad:

$$(2,2,1)A = (1,1,-3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a + d = 1 \\ 2b + e = 1 \\ 2d + 2e - c = -3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las 5 ecuaciones queda:

$$a = 1; \quad b = 1; \quad c = 1; \quad d = -1; \quad e = -1$$

Es decir la cónica es:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

(la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 1).

(c) *la ecuación de una elipse de centro el origen, que tiene por foco el punto $F(1,1)$ y pasa por el punto $(1,-1)$.*

Dado que el centro de la cónica es un centro de simetría de la misma el simétrico F' de F respecto del origen será el otro foco; equivalentemente el origen es el punto medio de los dos focos:

$$(0,0) = \frac{(1,1) + F'}{2} \iff F' = (-1,-1)$$

Ahora usamos la caracterización de la elipse como lugar geométrico, es decir, como conjunto de puntos cuya suma de distancias a los focos es constante:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = k$$

Para hallar la constante k imponemos que la cónica pase por el punto $(x,y) = (1,-1)$:

$$k = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2} + \sqrt{(1+1)^2 + (-1+1)^2} = 4.$$

La ecuación queda:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 4.$$

Sólo resta operar para simplificar la expresión.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \\
&(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \\
&x^2 - 2x + 1 - y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \\
&8\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 4x + 4y + 16 \\
&2\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = x + y + 4 \\
&4(x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1) = x^2 + y^2 + 16 + 2xy + 8x + 8y \\
&3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0.
\end{aligned}$$

(d) *Hallar la ecuación de una hipérbola que pasa por el origen, tiene por asíntota la recta $x - 2y - 1 = 0$ y uno de sus ejes es la recta $x - y - 1 = 0$.*

El eje es un eje de simetría de la cónica. Por tanto podemos calcular la otra asíntota como simétrica de la dada. Una vez que tengamos las dos asíntotas formaremos el haz de cónicas y obtendremos la cónica buscada imponiendo que pase por el origen.

Para hallar la simétrica de la asíntota tenemos en cuenta que uno de sus puntos es la intersección de la misma y el eje de simetría:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x,y)=(1,0).$$

Para hallar otro punto de la recta buscada, hallamos el simétrico de un punto cualquiera de la asíntota dada. Tomamos por ejemplo el punto $A=(-1,-1)$ que verifica la ecuación $x-2y-1=0$. Su simétrico $A'=(a,b)$ cumple:

- El punto medio de A, A' pertenece al eje de simetría:

$$\frac{A+A'}{2} = (\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}) \text{ pertenece a la recta } x-y-1=0,$$

de donde,

$$a-b=2.$$

- El vector AA' es perpendicular al eje de simetría, de donde:

$$(a+1,b+1)(1,1)=0 \iff a+b=-2.$$

Obtenemos $A'=(a,b)=(0,-2)$. La asíntota buscada es la recta que une los puntos $(1,0)$ y $(0,-2)$:

$$\frac{x}{1}-\frac{y}{2}=1 \iff 2x-y-2=0.$$

El haz de cónicas conocidas las dos asíntotas es:

$$(x-2y-1)(2x-y-2)+c=0.$$

Imponiendo que pase por el origen hallamos el valor de c:

$$(-1)(-2)+c=0 \quad \Rightarrow \quad c=-2.$$

La cónica pedida queda:

$$(x-2y-1)(2x-y-2)-2=0,$$

operando:

$$2x^2-5xy+2y^2-4x+5y=0.$$

(e) *una parábola que pasa por los puntos $P=(0,2)$, $Q=(1,0)$ y tal que la recta que une P y Q es la recta polar del punto $(0,0)$.*

Método I: Recordemos que la recta polar de un punto O respecto de una cónica une los puntos de tangencica de las tangentes exteriores a la cónica pasando por O. En nuestro caso esto quiere decir que las rectas uniendo $O=(0,0)$ con P y Q respectivamente, son tangentes a la parábola.

Utilizaremos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

La recta OP tiene por ecuación $x=0$; la recta OQ tiene por ecuación $y=0$; la recta PQ es:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-2}{0-2} \iff 2x+y-2=0.$$

El haz queda:

$$\lambda xy + (2x + y - 2)^2 = 0 \iff 4x^2 + y^2 + (4 + \lambda)xy - 8x - 4y + 4 = 0.$$

Para hallar el parámetro imponemos que la cónica sea de tipo parabólico, es decir, que el determinante de la matriz de términos cuadráticos sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 4 & (4+\lambda)/2 \\ (4+\lambda)/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{\lambda^2}{4} + 2\lambda = 0.$$

Obtenemos:

- $\lambda = 0$, pero entonces sustituyendo en el haz nos quedaría sólo la recta doble $(2x + y - 2)^2 = 0$ que no es una parábola.

- $\lambda = -8$. Entonces nos queda la ecuación:

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 8x - 4y + 4 = 0.$$

La matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es no nulo, por tanto es una cónica no degenerada y en definitiva la parábola buscada.

Método II: La matriz asociada a la cónica buscada es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Imponemos las condiciones del enunciado.

Como los puntos P y Q pertenencen a la cónica tenemos las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} (0,2,1)A(0,2,1)^t = 0 \iff 4d + 4e + f = 0. \\ (1,0,1)A(1,0,1)^t = 0 \iff a + 2c + f = 0. \end{array}\right. \qquad (I)$$

Además la recta polar del punto $(0,0)$ es la recta PQ, $2x + y - 2 = 0$:

$$(0,0,1)A(x,y,1)^t = 0 \quad \equiv \quad 2x + y - 2 = 0 \iff cx + ey + f \quad \equiv 2x + y - 2 = 0.$$

Deducimos que:

$$\frac{c}{2} = \frac{e}{1} = \frac{f}{-2} \iff c = 2e, \quad f = -2e.$$

Susituyendo en (I) nos queda:

$$d = -e/2, \qquad a = -2e.$$

Y la matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} -2e & b & 2e \\ b & -e/2 & e \\ 2e & e & -2e \end{pmatrix}.$$

Imponemos que el determinante de la matriz de términos cuadráticos sea nulo para que la cónica sea de tipo parabólico:

$$\begin{vmatrix} -2e & b \\ b & -e/2 \end{vmatrix} = 0 \iff e^2 = b^2.$$

Tenemos dos soluciones:

$$e = b \text{ ó } e = -b.$$

Si suponemos $e = b = 2$, la matriz asociada queda:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

con $det(A) \neq 0$. Es la parábola buscada:

$$-4x^2 - y^2 + 4xy + 8x + 4y - 4 = 0 \iff 4x^2 + y^2 - 4xy - 8x - 4y + 4 = 0.$$

Si suponemos $e = -b = 2$, la matriz asociada queda:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

con $det(A) = 0$. Es degenerada y no es una parábola.

(f) *una cónica que tiene por eje la recta $x - 2y = 0$, es tangente a $x = 3$ y pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(4, 1)$.*

Dado que es tangente a $x = 3$ y pasa por $A = (3, 1)$ (que cumple la ecuación de esa recta) el punto de tangencia es precisamente A. Entonces:

- Usando el eje y por simetría obtendremos una segunda tangente y un segundo punto de tangencia.

- Construiremos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

- Impondremos que la cónica buscada pase por $(-2, 1)$.

El simétrico del punto $A(3, 1)$ respecto de la recta $x - 2y = 0$ es un punto $A'(a, b)$ tal que:

- El vector $\vec{A}A' = (a - 3, b - 1)$ es perpendicular al eje de simetría o equivalentemente paralelo a su vector normal:

$$\frac{a-3}{1} = \frac{b-1}{-2} \iff 2a + b - 7 = 0.$$

- El punto medio de A y A' pertenece al eje $x - 2y = 0$:

$$\frac{3+a}{2} - 2 \cdot \frac{b+1}{2} = 0 \iff a - 2b + 1 = 0.$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones se obtiene $A' = (\frac{13}{5}, \frac{9}{5})$.

La intersección B de la tangente dada con el eje es:

$$\begin{cases} 0 = x - 2y \\ 0 = x - 3 \end{cases} \iff B = (x, y) = (3, \frac{3}{2}).$$

El simétrico de la tangente es la recta que une A' y B:

$$\frac{x - \frac{13}{5}}{3 - \frac{13}{5}} = \frac{y - \frac{9}{5}}{\frac{3}{2} - \frac{9}{5}} \iff 3x + 4y - 15 = 0.$$

Formamos el haz descrito anteriormente. La primera cónica es el producto de la dos tangentes:

$$(x - 3)(3x + 4y - 15) = 0$$

La segunda es la recta doble que une los puntos de tangencia $(3,1)$ y $(13/5, 9/5)$:

$$\frac{x-3}{\frac{13}{5}-3} = \frac{y-1}{\frac{9}{5}-1} \iff 2x+y-7=0.$$

El haz resulta:

$$\lambda(x-3)(3x+4y-15)+(2x+y-7)^2=0$$

Imponemos que pase por el punto $(4,1)$:

$$\lambda(4-4)(3\cdot 4+4\cdot 1-15)+(2\cdot 4+1-7)^2=0 \iff \lambda=-4.$$

La cónica pedida tiene por ecuación:

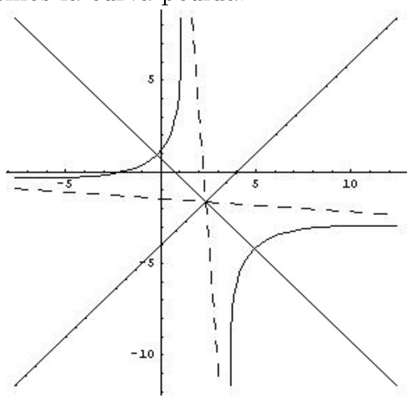
$$(2x+y-7)^2-4(x-3)(3x+4y-15)=0$$

Simplificando:

$$8x^2+12xy-y^2-34y-68x+131=0.$$

(g) *una cónica con vértice en el punto $V(1,1)$, que pasa por el punto $(2,4)$ y tal que las rectas $x+y-2=0$ y $x=2$ son tangentes a ella.*

La recta $x+y-2=0$ pasa por el vértice $V(1,1)$ y por tanto es tangente a la cónica en ese punto. La perpendicular a ella es un eje de la cónica. Nos permitirá calcular el simétrico de la otra tangente. Tendremos dos tangentes y puntos de tangencia; mediante un haz de cónicas e imponiendo que la cónica pedida pase por $(1,1)$ obtendremos la curva pedida.



1) Calculamos primero el eje. El vector normal de $x+y-2=0$ es $(1,1)$. Por tanto el eje es la recta que pasa por $V(1,1)$ y tiene por vector director $(1,1)$:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1} \iff x-y=0.$$

2) Calculamos el simétrico de la recta $x=2$ por la recta $x-y=0$. Para ello primero intersecamos las dos rectas:

$$x=2, \quad x-y=0 \quad \iff (x,y)=(2,2).$$

Calculamos ahora el simétrico del punto $P(2,4)$ por la recta $x-y=0$. Tal simétrico $P'(p,q)$ cumple:

$$\frac{P+P'}{2} \in \text{Eje de simetría} \qquad P'-P \perp \text{Eje}$$

De donde obtenemos:

$$\frac{2+p}{2}-\frac{4+q}{2}=0, \qquad (p-2,q-4)\cdot(1,1)=0$$

y resolviendo $(p, q) = (4, 2)$.

La recta simétrica es la que une $(2, 2)$ y $(4, 2)$, es decir, la recta $y = 2$.

3) Formamos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia $x = 2$ tangente en $(2, 4)$ e $y = 2$ tangente en $(4, 2)$. La recta que une los puntos de tangencia es:

$$x + y = 6.$$

El haz queda:

$$\lambda(x-2)(y-2) + (x+y-6)^2 = 0$$

4) Finalmente imponemos que pase por el punto $(1, 1)$:

$$\lambda(1-2)(1-2) + (1+1-6)^2 = 0 \iff \lambda = -16.$$

La cónica queda:

$$(x+y-6)^2 - 16(x-2)(y-2) = 0$$

Simplificando:

$$x^2 + y^2 - 14xy + 20x + 20y - 28 = 0.$$

(h) *una elipse sabiendo que tiene uno de sus focos en el punto $(-4, 2)$, el vértice más alejado del mismo es el punto $(2, -1)$ y la excentricidad vale $1/2$.*

Si denotamos por a, b, c respectivamente a las longitudes del semieje mayor, menor y distancia del foco al centro, de los datos dados deducimos que:

$$a + c = d(F, V), \qquad \frac{c}{a} = e = \frac{1}{2},$$

siendo $F = (-4, 2)$ y $V = (2, -1)$. Operando obtenemos:

$$d(F, V) = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-(-1))^2} = 3\sqrt{5}$$

y de ahí $a = 2\sqrt{5}$ y $c = \sqrt{5}$.

El otro foco F' está a distancia $2c$ sobre la recta que une F y V en la dirección $\vec{FV}$, es decir,

$$F' = F + \frac{\vec{FV}}{\|FV\|} \cdot 2c.$$

Operando tenemos:

$$\vec{FV} = (2, -1) - (-4, 2) = (6, -3) \text{ y } \|\vec{FV}\| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}.$$

de donde:

$$F' = (-4, 2) + \frac{(6, -3)}{3\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = (0, 0).$$

Finalmente para obtener la ecuación de la elipse usamos su caracterización como lugar geométrico de puntos cuya suma de distancias a los focos es constante. Tal constante sabemos además que es $2a$. La ecuación será entonces:

$$\sqrt{(x-(-4))^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 4\sqrt{5}.$$

Simplificando queda:

$$16x^2 + 19y^2 + 4xy + 60x - 30y - 225 = 0.$$

(1.2 puntos)

(i) *la parábola C tal que: la recta de ecuación $x+y-2=0$ es la tangente a C en el vértice; C pasa por el origen de coordenadas; y la recta polar del punto $(2,1)$ con respecto a C es paralela al eje OX.*

El autovector asociado al autovalor no nulo de la matriz T (parte cuadrática) de la parábola, tiene la misma dirección que la tangente en el vértice, es decir, $(1,-1)$. Teniendo en cuenta que $det(T)=0$, salvo producto por escalar, deducimos que T es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz A asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & d \\ -1 & 1 & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Dado que el origen pertenece a la cónica, deducimos que $f=0$.

Aplicamos ahora que la recta polar en el punto $(2,1)$ es paralela al eje OX. Significa que:

$$(2,1,1)A(x,y,1)^t \text{ es paralela a } y=0 \quad \Rightarrow \quad 2-1+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-1$$

Tenemos que, la ecuación de la cónica es:

$$x^2+y^2-2xy-2x-2ey=0 \iff (x-y)^2-2x+2ey=0$$

Para calcular el coeficiente e, aplicamos que $x+y-2$ es tangente a la parábola. Su intersección con la cónica debe de ser un único punto. El punto genérico de esta recta es $(\lambda, 2-\lambda)$. Sustituimos en la cónica:

$$(2\lambda-2)^2-2\lambda+2e(2-\lambda)=0 \iff 4\lambda^2+(-2e-10)\lambda+(4+4e)=0$$

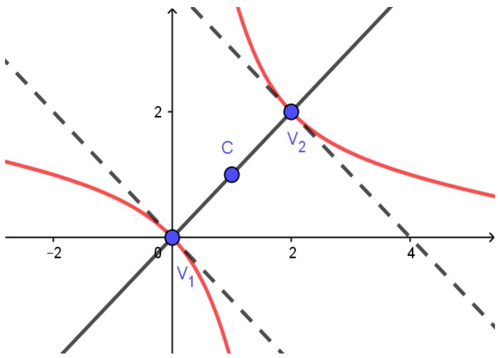
Para que haya solamente una solución el discriminante ha de ser cero:

$$(-2e-10)^2-16(4+4e)=0 \quad \Rightarrow \quad e=3$$

La ecuación pedida es:

$$x^2+y^2-2xy-2x+6y=0$$

12.– *Hallar la ecuación de una hipérbola sabiendo que su centro es $(1,1)$, tiene un vértice en $(0,0)$ y pasa por el punto $(4,1)$.*



Desarrollaremos la siguiente idea:

1) Dado que la cónica es simétrica respecto al centro podemos calcular el segundo vértice.

2) En los vértices las tangentes son perpendiculares al eje que es la recta que los une. Por tanto podemos usar el haz de cónicas conocidos dos puntos y sus tangente en ellos.

3) Impondremos por último que la cónica pasa por el punto $(4,1)$.

1) Tenemos $C=(1,1)$ y $V_1=(0,0)$. Si V_2 es el segundo vértice:

$$\frac{V_1+V_2}{2}=C \quad \Rightarrow \quad V_2=2C-V_1=(2,2).$$

2) El haz conocidos dos puntos y dos tangentes está generado por el producto de las dos tangentes y la recta doble que une los puntos de tangencia.

Las tangentes en los vértices son perpendicualres al eje y por tanto su vector normal es el que une centro y vértices: $\vec{V_1C}=(1,1)$. Son rectas de la forma $x+y+d=0$.

- Si imponemos que pase por $V_1=(0,0)$ queda $0+0+d=0$, es decir, $d=0$ y la recta es $x+y=0$.

- Si imponemos que pase por $V_2=(2,2)$ queda $2+2+d=0$, es decir, $d=-4$ y la recta es $x+y-4=0$.

La recta que une los puntos de tangencia, es decir, los vértices $V_1=(0,0)$ y $V_2=(2,2)$ es:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{2-0} \iff x-y=0.$$

El correspondiente haz de cónicas queda:

$$(x+y)(x+y-4)+\lambda(x-y)^2=0.$$

3) Ahora imponemos que pase por el punto $(4,1)$:

$$(4+1)(4+1-4)+\lambda(4-1)^2=0 \iff \lambda=-5/9$$

Sustituyendo el valor de $\lambda=-5/9$ en el haz resulta:

$$(x+y)(x+y-4)-\frac{5}{9}(x-y)^2=0 \iff 9(x+y)(x+y-4)-5(x-y)^2=0$$

y simplificando:

$$x^2+y^2+7xy-9x-9y=0.$$

13.– *En un haz de cónicas generado por dos cónicas que no son de tipo parábolico, cuál es el máximo número de parábolas que puede haber?.*

Un haz de cónicas se forma tomando combinaciones lineales de las ecuaciones de las cónicas generadoras:

$$((x,y,1)A_1(x,y,1)^t)+\lambda((x,y,1)A_2(x,y,1)^t)=0.$$

(al usar un sólo parámetro omitimos una de las cónicas generadoras; pero ya sabemos que éstas no son una parábola).

La condición para que sean parábolas es que el determinante de la matriz de términos cuadráticos sea nulo. Pero ese determinante al ser de orden dos y no anularse siempre (porque al menos hay una cónica que no es parábola), nos da una ecuación de grado uno o dos en la variable λ. Por tanto a lo sumo hay una o dos soluciones. El máximo número de parábolas que puede haber son dos.

14.– *Hallar la ecuación de una hipérbola con los vértices en los puntos* $(0,0)$ *y* $V=(2,2)$ *y una asíntota perpendicular a la recta* $2x+y=0$.

Seguiremos los siguientes pasos:

- El centro es el punto medio de los vértices y el eje la recta que los une.

- Una de las asíntotas es perpendicular a la dada y pasando por el centro.

- Calculamos el simétrico de la asíntota respecto al eje para obtener una segunda asíntota. Un punto de ella sabemos que es el centro. El otro será el simétrico respecto al eje de un punto de la primera asíntota.

- Finalmente planteamos el haz de cónicas conocidas dos asíntotas e imponemos que la cónica buscada pase por uno de los vértices.

El centro es:

$$C=\frac{(0,0)+(2,2)}{2}=(1,1).$$

El eje la recta que une $(0,0)$ y $(2,2)$:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{2-0}\iff x-y=0.$$

Una recta perpendicular a $2x+y=0$ es de la forma $x-2y+c=0$. Imponiendo que pase por el centro $(1,1)$ queda $c=1$. Es decir la recta $x-2y+1=0$.

Tomamos un punto cualquiera de la asíntota dada $x-2y+1=0$. Por ejemplo $P=(-1,0)$. Su simétrico $P'=(a,b)$ respecto al eje cumple:

$$\frac{P+P'}{2}\in eje \iff \frac{a-1}{2}-\frac{b}{2}=0\iff a-b=1.$$

y

$$\vec{PP'}\perp eje \iff (a+1,b)\perp(1,1)\iff a+b=-1$$

Obtenemos $P'=(a,b)=(0,-1)$.

La segunda asíntota es por tanto la recta que une el centro $(1,1)$ con $(0,-1)$:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y+1}{1+1}\iff 2x-y-1=0$$

El correspondiente haz de cónicas conocidas dos asíntotas es:

$$(x-2y+1)(2x-y-1)+d=0$$

Imponemos que pase por el vértice $(0,0)$:

$$(0-2\cdot 0+1)(2\cdot 0-0-1)+d=0\iff d=1.$$

La cónica queda:

$$(x-2y+1)(2x-y-1)+1=0\iff 2x^2-5xy+2y^2+x+y=0.$$

15.– *Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto $(1,1)$, es tangente a la recta $x+y-3=0$ en $(1,2)$ y tiene una asíntota paralela al eje OX.*

Dado que la cónica es simétrica respecto del centro haremos lo siguiente:

1- Hallamos el punto P' simétrico de $P=(1,2)$ respecto del centro.

2- Hallamos el simétrico de la tangente dada respecto del centro. Será otra tangente a la cónica en el punto P'.

3- Construimos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

4- Imponemos que la cónica tenga por dirección asintótica el vector director del eje OX.

1) El simétrico de $P=(1,2)$ respecto a $C(1,1)$ cumple:

$$C=\frac{P+P'}{2} \qquad \Rightarrow \qquad P'=2C-P=2(1,1)-(1,2)=(1,0).$$

2) La recta simétrica de $x+y-3=0$ (que pasa por $P=(1,2)$) respecto al centro, es la paralela que pasa por P' (el simétrico de P). Una recta paralela a la dada es de la forma:

$$x+y+d=0$$

Imponemos que pasr por $P'=(1,0)$. $1+0+d=0$ de donde $d=-1$ y la recta queda $x+y-1=0$.

3) El haz de cónicas está generado por el producto de las tangentes y la recta doble que une los puntos de tangencia.

Calculamos la recta que une $P=(1,2)$ y $P'=(1,0)$. Dado que tienen la misma coordenada x es la recta $x-1=0$. El haz queda:

$$(x+y-1)(x+y-3)-\lambda(x-1)^2=0$$

Y desarrollando:

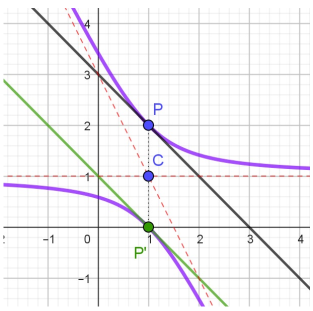
$$(1-\lambda)x^2+2xy+y^2+2(\lambda-2)x-4y+3-\lambda=0$$

4) Imponemos que la cónica tenga por dirección asintótica el vector director del eje OX, es decir, el vector $(1,0)$. Eso significa que:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=0 \iff 1-\lambda=0 \iff \lambda=1.$$

La cónica buscada queda:

$$2xy+y^2-2x-4y+2=0.$$



16.– *Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto* $(1,2)$*, es tangente a la recta* $x+y-2=0$ *en el punto* $(2,0)$ *y pasa por el origen.*

Desarrollaremos la siguiente idea:

- Dado que una cónica es simétrica respecto a su centro podemos conocer otra tangente "duplicando" por simetría la dada.

- Después podemos formar el haz de cóncias conocidas dos tangentes y los dos puntos de tangencia.

- Finalmente imponemos que la cónica buscada pase por el origen.

Comenzamos hallando el simétrico (p,q) del punto de tangencia $(2,0)$ respecto al centro $(1,2)$. Se ha de cumplir:

$$\frac{(p,q)+(2,0)}{2}=(1,2) \quad \Rightarrow \quad (p,q)=2(1,2)-(2,0)=(0,4).$$

Después hallamos la recta simétrica de $x+y-2=0$ respecto del centro $(1,2)$. Pero la simétrica de una recta respecto a un punto es paralela a la recta original. Por tanto la recta buscada es la paralela a $x+y-2=0$ que pasa por el punto $(0,4)$ calculado antes. Será de la forma $x+y+d=0$. Imponiendo que pase por $(0,4)$:

$$0+4+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-4$$

La recta queda $x+y-4=0$.

El haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia esta generado por la cónica formada por el producto de ambas tangentes y la recta doble que une los puntos de tangencia.

La recta que une los puntos de tangencia $(2,0)$ y $(0,4)$ es:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \iff 2x+y-4=0.$$

El haz queda:

$$(x+y-2)(x+y-4)+\lambda(2x+y-4)^2=0$$

Imponemos que pase por el origen:

$$(0+0-2)(0+0-4)+\lambda(2\cdot 0+0-4)^2=0 \iff \lambda=-1/2.$$

La ecuación queda:

$$(x+y-2)(x+y-4)-\frac{1}{2}(2x+y-4)^2=0.$$

Operando y simplificando:

$$2x^2-y^2-4x+4y=0.$$

17.– *Hallar la ecuación de una elipse de centro el punto* $(1,2)$*, un foco en* $(2,4)$ *y sabiendo además que la distancia entre los dos vértices situados sobre el eje menor es* 4.

Utilizando que la cónica es simétrica respecto al centro, calcularemos el segundo foco como simétrico del primero.

Después usaremos la definición de la elipse como lugar geométrico: la suma de distancias de puntos a los focos es constante igual a $2a$.

Por último tendremos en cuenta que $a^2=b^2+c^2$ donde b es el radio menor de la elipse y c la distancia del centro al foco.

Entonces, $C=(1,2)$, $F=(2,4)$, F' es el simétrico de F respecto de C:

$$\frac{F+F'}{2}=C \iff F'=2C-F=(2,4)-(2,4)=(0,0).$$

Ahora de los datos dados $2b = 4$, es decir, $b = 2$ y $c = d(F', C) = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$. Por tanto:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4+5} = 3.$$

Finalmente la ecuación de la elipse queda:

$$d(F, (x,y)) + d(F', (x,y)) = 2a \iff \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 6$$

Operando:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 6 - \sqrt{(x^2 + y^2)} \\
&(x-2)^2 + (y-4)^2 = 36 + x^2 + y^2 - 12\sqrt{x^2 + y^2} \\
&x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 36 + x^2 + y^2 - 12\sqrt{x^2 + y2} \\
&12\sqrt{x^2 + y^2} = 4x + 8y + 16 \\
&3\sqrt{x^2 + y^2} = x + 2y + 4 \\
&9(x^2 + y^2) = (x + 2y + 4)^2 \\
&9x^2 + 9y^2 = x^2 + 4y^2 + 16 + 4xy + 8x + 16y \\
&8x^2 - 4xy + 8y^2 - 8x - 16y - 16 = 0 \\
&2x^2 - xy + 2y^2 - 2x - 4y - 4 = 0
\end{aligned}$$

I.– *En el plano afín dada la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 3xy + y^2 + x + y = 0$$

(i) *Clasificar la cónica.* Para evitar "arrastrar" fracciones en las operaciones multiplicamos por 2 la ecuación:

$$2x^2 - 6xy + 2y^2 + 2x + 2y = 0.$$

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Los determinantes son:

$$det(A) = -10, \qquad det(T) = -5.$$

Se trata por tanto de una hipérbola.

(ii) *Hallar su centro, ejes y vértices.*

El centro es el punto (a, b) verificando la ecuación:

$$A\,(\,a \quad b \quad 1\,) = (\,0 \quad 0 \quad h\,) \iff 2a - 3b + 1 = 0, \quad -3a + 2b + 1 = 1 = 0.$$

Resolviendo obtenemos $(a, b) = (1, 1)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos. Comenzamos calculando el polinomio característico de T:

$$det(T - \lambda Id) = (2 - \lambda)^2 - 3^2 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 5$.

Calculamos los correspondientes autovectores.

Asociados a $\lambda_1 = -1$:

$$(T + 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1 = (1, 1).$$

Asociados a $\lambda_2 = 5$:

$$(T - 5Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = (1, -1).$$

Finalmente los ejes son sus rectas polares:

$$(\,1 \quad 1 \quad 0\,)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y - 2 = 0$$

$$(\,1 \quad -1 \quad 0\,)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0.$$

Los vértices son la intersección de los ejes con la cónica. Intersecamos el primero:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 + x + y = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $y = 2 - x$. Sustiyuendo en la segunda:

$$5x^2 - 10x + 6 = 0 \iff x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6}}{2} \text{ el discrimiante es negativo.}$$

Luego este eje no corta a la cónica.

Intersecamos ahora el segundo:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 + x + y = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $y = x$. Sustiyuendo en la segunda:

$$-x^2 + 2x = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 2.$$

Los vértices son entonces $(0, 0)$ y $(2, 2)$.

(iii) *Calcular su ecuación reducida y excentricidad.*

Para la ecuación reducida tomamos como primer autovalor el que tiene el mismo signo que $det(A)$. La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0.$$

Donde $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$ y:

$$d = \frac{A}{\lambda_1 \lambda_2} = -10 - 5 = 2.$$

Queda:

$$-x''^2 + 5y''^2 + 2 = 0.$$

O equivalentemtene expresada en forma canónica:

$$x''^2 - 5y''^2 = 2 \iff \frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{2/5} = 1$$

La excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2 + \frac{2}{5}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

II.– *Para cada número $k \in R$ se define la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 2kxy + y^2 - 1 = 0.$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.*

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$det(A) = -(1-k^2), \quad det(T) = 1-k^2.$$

Por tanto $det(T) = 0 \iff k = \pm 1$. Distinguimos los casos:

- Si $k < -1$, $det(T) < 0$, $det(A) > 0$. Se trata de una hipérbola.

- Si $k = -1$, $det(T) = 0$, $det(A) = 0$. Se trata de un par de rectas paralelas, reales o imaginaria, o una recta doble. En particular la ecuación queda:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \iff (x+y)^2 - 1 = 0 \iff (x+y-1)(x+y+1) = 0.$$

Se trata por tanto de dos rectas paralelas reales.

- Si $-1 < k < 1$, $det(T) > 0$, $det(A) < 0$. Se trata de una elipse real.

- Si $k = 1$, $det(T) = 0$, $det(A) = 0$. Se trata de un par de rectas paralelas, reales o imaginarias, o una recta doble. En particular la ecuación queda:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 \iff (x-y)^2 - 1 = 0 \iff (x-y-1)(x-y+1) = 0.$$

Se trata por tanto de dos rectas paralelas reales.

- Si $k > 1$, $det(T) < 0$, $det(A) > 0$. Se trata de una hipérbola.

(ii) *Cuando tenga sentido, calcular al excentricidad de la cónica en función de k.*

Tiene sentido cuando la cónica es una elipse o una hipérbola. Calculamos los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - k^2 = 0 \iff \lambda = 1-k \quad \text{ó} \quad \lambda = 1+k.$$

La ecuación reducida quedará por tanto:

$$(1-k)x^2 + (1+k)y^2 = 1-k^2 \iff \frac{x^2}{1+k} + \frac{y^2}{1-k} = 1.$$

Distinguimos ahora los casos:

- Si $k < -1$ es una hipérbola. La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, siendo $c = \sqrt{a^2+b^2}$ y a, b respectivamente la raíz cuadrada de los denominadores que acompañan a los coeficientes de x, y con signos positivo y negativo. En este caso $a = \sqrt{1-k}$, $b = \sqrt{-k-1}$. Por tanto:

$$c = \sqrt{(1-k) + (-1-k)} = \sqrt{-2k},$$

y

$$e = \frac{\sqrt{-2k}}{\sqrt{1-k}}.$$

- Si $-1 < k < 1$ es una elpise. La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, siendo $c = \sqrt{a^2-b^2}$ y a, b respectivamente los semiejes mayor y menor. Vemos que:

– Si $-1 < k \leq 0$ entonces el semieje mayor es $a = \sqrt{1-k}$ y el menor $b = \sqrt{1+k}$.

– Si $0 \leq k < 1$ entonces el semieje mayor es $a = \sqrt{1+k}$ y el menor $b = \sqrt{1-k}$.

Ambas cosas se resumen diciendo que $a = \sqrt{1+|k|}$, $\quad b = \sqrt{1-|k|}$. Entonces:

$$c = \sqrt{(1+|k|) - (1-|k|)} = \sqrt{2|k|},$$

y

$$e = \frac{\sqrt{2|k|}}{\sqrt{1+|k|}}.$$

- Si $k > 1$ es una hipérbola. La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y a, b respectivamente la raíz cuadrada de los denominadores que acompañan a los coeficientes de x, y con signos positivo y negativo. En este caso $a = \sqrt{1+k}$, $b = \sqrt{k-1}$. Por tanto:

$$c = \sqrt{(1+k) + (k-1)} = \sqrt{2k},$$

y

$$e = \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{1+k}}.$$

En resumen y en todo caso:

$$e = \frac{\sqrt{2|k|}}{\sqrt{1+|k|}}.$$

(1 punto)

III.– *Se dice que una hipérbola es equilátera cuando sus asíntotas son perpendiculares.*

(a) *Demostrar que una cónica no degenerada es una hipérbola equilátera si y sólo si es nula la traza de su matriz T de coeficientes cuadráticos, con respecto a una referencia rectangular.*

Sea T la matriz de términos cuadrático de una matriz no degenerada.

Supongamos que la traza es nula. Entonces la suma de los autovalores de T es 0, y estos son λ y $-\lambda$, donde $\lambda \neq 0$, por ser la cónica no degenerada. Se trata de una hiperbola y en una referencia rectangular adecuada sabemos que su ecuación se escribe como:

$$\lambda x^2 - \lambda y^2 + c = 0$$

Las asíntotas son por tanto $\lambda x - \lambda y = 0$ y $\lambda x + \lambda y = 0$. Vemos que son perpendiculares.

Recíprocamente dada una hipérbola equilátera, sabemos que su ecuación en un sistema de referencia rectangular adecuado puede escribirse como:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de T, de signos positivo y negativo respectivamente. Las asíntotas son $\sqrt{\lambda_1}x + \sqrt{-\lambda_2}y = 0$ y $\sqrt{\lambda_1}x - \sqrt{-\lambda_2}y = 0$. Si son perpendiculares, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Deducimos que la traza de T es cero.

(b) *Encontrar todas las hipérbolas equiláteras que tengan la recta $y = 2x$ por eje focal.*

Recordemos primero lo siguiente. Si la ecuación reducida de una hipérbola equilátera es:

$$\lambda x^2 - \lambda y^2 + c = 0$$

con $\lambda > 0$ y $c < 0$, el eje focal es el eje OX $(y = 0)$ y es paralelo al autovector de la matriz T asociado al autovalor positivo.

Por tanto en las hipérbolas que buscamos el autovector de la matriz T asociado al autovalor positivo será el $(1, 2)$, siempre que $det(A) > 0$ (condición análoga a $c > 0$).

Así por el apartado anterior, la matriz T es de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Imponemos que $(1, 2)$ sea un autovector asociado al autovector λ:

$$(1,2)T = \lambda(1,2) \quad \Rightarrow \quad a = -3\lambda/5; \quad b = 4\lambda/5$$

Podemos tomar $\lambda = 5$, y T es de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz asociada A será:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & d \\ 4 & 3 & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Ahora imponemos que el eje focal sea $y = 2x$, es decir: $(2, -1, 0)A(x, y, 1)$ paralelo a $2x - y = 0$. Operando obtenemos:

$$2d - e = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 2d$$

La matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & d \\ 4 & 3 & 2d \\ d & 2d & f \end{pmatrix}$$

Recordemos que además hemos impuesto la condición $det(A) > 0$:

$$det(A) > 0 \iff d^2 > f$$

IV.– *Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro $k \in R$:*

$$x^2 + 8xy + ky^2 - 2x + 2ky = 0$$

a) *Clasificar las cónicas en función de k.*

La matriz asociada A y de términos cuadráticos T son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & k & k \\ -1 & k & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & k \end{pmatrix}.$$

Calculamos los determinantes:

$$|A| = -k(k + 9), \qquad |T| = k - 16$$

Los puntos donde se anulan y son $k = -9, 0, 16$. Por tanto estudiamos los siguientes casos:

Parámetro	$\|A\|$	$\|T\|$	Cónica
$k < -9$	$-$	$-$	hipérbola
$k = -9$	0	$-$	rectas reales cortándose en un punto
$-9 < k < 0$	$+$	$-$	hipérbola
$k = 0$	0	$-$	rectas reales cortándose en un punto
$0 < k < 16$	$-$	$-$	hipérbola
$k = 16$	$-$	0	parábola
$k > 16$	$-$	$+$	elipse

b) *Para $k = 1$ hallar la distancia entre sus dos focos.*

Las matrices A y T nos quedan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el apartado anterior vimos que para $k = 1$ la cónica es una hipérbola. Sabemos que mediante un determinado giro y una traslación (conservando por tanto las distancias) la cónica tiene por ecuación reducida una de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En ese caso la distancia del centro al foco es $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y entre los dos focos $2c$.

Comencemos entonces calculando la ecuación reducida. El polinomio característico de T es:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 4^2 = 0 \iff (5-\lambda)(-3-\lambda) = 0$$

Por tanto los autovalores son:

$$\lambda_1 = 5, \qquad \lambda_2 = -3.$$

La ecuación reducida queda:

$$5x'^2 - 3y'^2 + d = 0.$$

Para hallar d utilizamos que el determinante de la matriz asociada se conserva por isometrías. Por tanto:

$$-15d = |A| \iff d = \frac{|A|}{-15} = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3}.$$

La ecuación resulta:

$$5x'^2 - 3y'^2 + \frac{2}{3} = 0.$$

Y operando:

$$\frac{y'^2}{2/9} - \frac{x'^2}{2/15} = 1.$$

La distancia del centro a un foco es:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{2}{15}} = \sqrt{\frac{16}{45}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

Y finalmente la distancia entre los focos:

$$2c = \frac{8\sqrt{5}}{15}.$$

c) *Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.*

Vimos que las rectas aparecen para $k = -9$ y $k = 0$. En cada caso, para hallar sus ecuaciones calcularemos el centro de la cónica, que es el punto de intersección de ambas y un punto adicional en cada una ellas, intersecando la cónica con una recta.

Para $k = -9$, la ecuación es:

$$x^2 + 8xy - 9y^2 - 2x - 18y = 0.$$

El cento es el punto (p, q) verificando:

$$(p, q, 1)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -9 & -9 \\ -1 & -9 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, h) \iff \begin{array}{r} p + 4q - 1 = 0 \\ 4p - 9q - 9 = 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $(p, q) = (\frac{9}{5}, \frac{-1}{5})$.

Ahora intersecamos la cónica con la recta $y = 0$ y obtenemos:

$$x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0.$$

Los puntos de intersección son: $(0,0)$ y $(2,0)$.

Las rectas buscadas se obtienen uniéndolos con el centro.

Recta por $(0,0)$ y $(\frac{9}{5}, \frac{-1}{5})$:

$$\frac{x}{9/5} = \frac{y}{-1/5} \iff x + 9y = 0.$$

Recta por $(2,0)$ y $(\frac{9}{5}, \frac{-1}{5})$:

$$\frac{x-2}{9/5-2} = \frac{y}{-1/5} \iff x - y - 2 = 0.$$

Para $k = 0$, la ecuación es:

$$x^2 + 8xy - 2x = 0 \iff x(x + 8y - 2) = 0$$

Directamente vemos que las dos rectas en las que se descompone son:

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 8y - 2 = 0.$$

V.– *Se consideran las cónicas C_1 y C_2 de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} C_1 \equiv \quad & x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0 \\ C_2 \equiv \quad & xy + y^2 - 2x + y - 8 = 0. \end{aligned}$$

Hallar la ecuación de la cónica no degenerada que pasa por los puntos de intersección de C_1 y C_2 y tiene el centro sobre la recta $x - y - 2 = 0$.

Consideramos el haz de cónicas que pasan por los puntos $C_1 \cap C_2$. Está generado por dos cónicas cualesquiera pasando por tales puntos; en concreto por las propias C_1 y C_2. El haz es por tanto:

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 5 + a(xy + y^2 - 2x + y - 8) = 0$$

y agrupando términos:

$$x^2 + (1+a)xy + (1+a)y^2 + 2(1-a)x + (1+a)y - 5 - 8a = 0,$$

para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Vamos a imponer la condición de que el centro de la cónica esté en la recta dada. Para hallar el centro consideramos la matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & (1+a)/2 & 1-a \\ (1+a)/2 & (1+a) & (1+a) \\ 1-a & (1+a)/2 & -5-8a \end{pmatrix}.$$

El centro es un punto (x,y) verificando:

$$(x, y, 1)A = (0, 0, h).$$

Además tiene que cumplirse que pertenezca a la recta dada: $x - y - 2$. Operando, tenemos el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x + \left(\frac{1+a}{2}\right) y + 1 - a &= 0 \\ \left(\frac{1+a}{2}\right) x + (1+a)y + \left(\frac{1+a}{2}\right) &= 0 \\ x - y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos suponer $a \neq -1$ (en otro caso la segunda fila de A sería nula y la cónica sería degenerada). De manera que simplificando queda:

$$x + \left(\frac{1+a}{2}\right) y + 1 - a = 0$$
$$x + 2y + 1 = 0$$
$$x - y - 2 = 0$$

De las dos últimas ecuaciones obtenemos $(x, y) = (1, -1)$ y sustituyendo en la primera $a = 1$. La cónica pedida es:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y - 13 = 0.$$

VI.– *En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular, se pide hallar la ecuación de una elipse para la que los dos vértices que pertenecen a un eje son los puntos* $(2, 1)$ *y* $(0, -1)$ *y que la distancia entre sus dos focos es 4.*

(Examen final, junio 2003)

Sabemos que el centro de la elipse es el punto medio entre los vértices que pertenecen a un mismo eje. En este caso:

$$C = \frac{(2, 1) + (0, -1)}{2} = (1, 0)$$

Por otra parte

$$2c = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

Además la distancia entre los vértices es:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto:

$$2a = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$$

Dado que $a < c$ deducimos que $b^2 = a^2 + c^2 = 6$. La ecuación reducida queda:

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$$

Para calcular la ecuación en la base inicial escribimos las ecuaciones de cambio de base. Teniendo en cuenta que los ejes tienen las direcciones $(2, 2)$ y su perpendicular y que conocemos el centro, queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Despejando (x', y') queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y + 1) \end{cases}$$

Si substituimos en la ecuación reducida anterior obtenemos la ecuación que buscábamos:

$$x^2 + y^2 + xy - 2x - y - 2 = 0$$

VII.– *En el plano afín dada la cónica de ecuación:*

$$3x^2 + 4xy - 10x - 4y = 0$$

(i) Clasificar la cónica.

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $det(A) = 28$ y $det(T) = -4$. Se trata por tanto de una hipérbola.

(ii) *Hallar su centro, ejes, y asíntotas.*

El centro es un punto (x_0, y_0) verificando:

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

siendo h cualquier número real. Operando se obtienen las ecuaciones:

$$3x_0 + 2y_0 - 5 = 0, \quad 2x_0 - 2 = 0,$$

y resolviendo $C = (x_0, y_0) = (1, 1)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos. Tenemos:

$$p_T(\lambda) = det(T - \lambda Id) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Las raíces del polinomio característico son los autovalores:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \iff \lambda = \frac{3 + \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Calculamos los respectivos autovectores:

- Asociados a $\lambda_1 = 4$:

$$(T - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + 2y = 0 \iff (x, y)||(2, 1)$$

- Asociados a $\lambda_1 = -1$:

$$(T + I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 4x + 2y = 0 \iff (x, y)||(-1, 2)$$

Los ejes son las corresponientes rectar polares:

$$(2,1,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 8x + 4y - 12 = 0 \iff 2x + y - 3 = 0.$$

$$(-1,2,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + 2y - 1 = 0 \iff x - 2y + 1 = 0.$$

Las asíntotas son las rectas polares de las direcciones asíntóticas. Si (p,q) es una dirección asintótica cumple:

$$(p,q)T(p,q)^t = 0 \iff 3p^2 + 4pq = 0 \iff p = 0 \text{ ó } p = -4q/3.$$

Obtenemos las direcciones $(0,1)$ y $(4,-3)$. Las asíntotas resultan:

$$(0,1,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x - 2 = 0 \iff x - 1 = 0.$$

$$(4,-3,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 3x + 4y - 7 = 0 \iff 3x + 4y - 7 = 0.$$

(iii) *Calcular su ecuación reducida y excentricidad.*

La ecuación reducida es:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d = 0$$

donde $d = \dfrac{det(A)}{det(T)} = -7$. Queda:

$$4x'^2 - y'^2 - 7 = 0 \iff 4x'^2 - y'^2 = 7 \iff \frac{x'^2}{7/4} - \frac{y'^2}{7} = 1.$$

La excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(7/4)+7}}{\sqrt{7}/2} = \sqrt{5}.$$

VIII.– *Hallar la ecuación de una hipérbola una de cuyas asíntotas es la recta $x + 2y - 2 = 0$, la otra asíntota es paralela al eje OY y sabiendo que la polar del punto $(1,0)$ es la recta $x + y - 3 = 0$.*

Método I: Sabemos que las asíntotas son

$$\begin{aligned} x + 2y - 2 &= 0 \\ x - b &= 0 \end{aligned}$$

para algún $b \in \mathbb{R}$.

Formamos el haz de cónicas conocidas dos asíntotas. Como la cónica pedida es no degenerada podemos escribir el haz como:

$$(x + 2y - 2)(x - b) + \lambda = 0$$

Desarrollando queda:

$$x^2 + 2xy - (2+b)x - 2by + 2b + \lambda = 0$$

Ahora imponemos que la recta polar de $(1,0)$ es la recta $x + y - 3 = 0$.

Escribimos la matriz de la cónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(2+b)/2 \\ 1 & 0 & -b \\ -(2+b)/2 & -b & 2b+\lambda \end{pmatrix}$$

La recta polar del punto $(1,0)$ es:

$$(1,0,1)A(x,y,1)^t = 0 \iff (1 - \frac{2+b}{2})x + (1-b)y - \frac{2+b}{2} + 2b + \lambda = 0$$

Imponemos que sus coeficientes sean proporcionales a los de $x+y-3=0$ y obtenemos dos ecuaciones:

$$1-\frac{2+b}{2}=1-b; \qquad \text{y} \qquad -3(1-b)=-\frac{2+b}{2}+2b+\lambda$$

Resolviendo el sistema queda $b=2$ y $\lambda=1$, y la hipérbola pedida es:

$$x^2+2xy-4x-4y+5=0$$

Método II: Supongamos que la matriz de la cónica pedida es:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que las recta $x+2y-2=0$ es una asíntota, sabemos que es tangente a la cónica en su punto del infinito, es decir:

$$(2,-1,0)A(x,y,1)=0 \iff (2a-b)x+(2b-d)y+2c-e=0 \equiv x+2y-2=0$$

Como ambas ecuaciones corresponden a la misma recta sus coeficientes son proporcionales y obtenemos dos relaciones:

$$\begin{aligned} 2b-d &= 4a-2b \\ 2b-d &= -(2c-e) \end{aligned}$$

Por otra parte una recta paralela a OY también es asíntota, luego su punto del infinito pertenece a la cónica:

$$(0,1,0)A(0,1,0)^t=0 \quad \Rightarrow \quad d=0$$

Finalmente imponemos que la recta polar en $(1,0)$ es $x+y-3=0$:

$$(1,0,1)A(x,y,1)=0 \iff (a+c)x+(b+e)y+(c+f)=0 \equiv x+y-3=0$$

De nuevo teniendo en cuenta que los coeficientes son proporcionales obtenemos:

$$\begin{aligned} a+c &= b+e \\ -3(a+c) &= c+f \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema formado por las 5 ecuaciones resulta:

$$b=a; \quad c=-2a; \quad d=0; \quad e=-2a; \quad f=5a.$$

La matriz de la cónica es:

$$A=\begin{pmatrix} a & a & -2a \\ a & 0 & -2a \\ -2a & -2a & 5a \end{pmatrix}$$

y tomando $a=1$ corresponde a la cónica obtenida con el método anterior.

(Segundo parcial, mayo 2005)

IX.– *Calcular la ecuación de una cónica de centro el punto* $(0,1)$*, tangente a la recta* $x+y=0$ *en el punto* $(1,-1)$ *y que tiene por asíntota la recta* $y=1$*.*

Método I: Consideramos el haz de cónicas conocidas una tangente, el punto de tangencia y una asíntota.

Las cónicas que lo generan son:

1) La formada por la asíntota y la tangente:

$$(x+y)(y-1)=0$$

2) La recta doble que pasa por el punto de tangencia y es paralela a la asíntota (une los puntos de tangencia de ambas si interpetamos la asíntota como tangente en un punto del infinto). Una recta paralela a la asíntota es de la forma:

$$y=c.$$

Imponemos que pase por el punto $(1,-1)$ y deducimos que $c=-1$.

Formamos el haz:

$$(x+y)(y-1)+\lambda(y+1)^2=0 \iff (\lambda+1)y^2+xy-x+(2\lambda-1)y+\lambda=0$$

Imponemos que el centro sea el punto $(0,1)$. La matriz asociada es:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & \lambda+1 & \lambda-1/2 \\ -1/2 & \lambda-1/2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El centro cumple:

$$(0,1,1)A=(0,0,h) \quad \Rightarrow \quad 1/2-1/2=0, \quad \lambda+1+\lambda-1/2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1/4.$$

La cónica queda:

$$3y^2+4xy-4x-6y-1=0.$$

Método II: Sabemos que la cónica buscada es simétrica respecto del centro. Por tanto la recta simétrica a $x+y=0$ por el punto $(0,1)$ es tangente a la cónica buscada en el simétrico de $(1,-1)$. Si llamamos A' a ese simétrico cumple:

$$\frac{A'+(-1,1)}{2}=(0,1) \quad \Rightarrow \quad A'=(0,2)-(1,-1)=(-1,3)$$

La recta simétrica es paralela a la inical:

$$x+y+c=0$$

Como pasa por A':

$$-1+3+c=0 \quad \Rightarrow \quad c=-2$$

Ahora consideramos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

Las cónicas que lo generan son:

1) La formada por las tangentes:

$$(x+y)(x+y-2)=0$$

2) La recta doble que pasa une los puntos de tangencia de ambas.

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y+1}{3+1} \iff 2x+y-1=0.$$

Formamos el haz:

$$(x+y)(x+y-2)+\lambda(2x+y-1)^2=0$$

Imponemos que la recta $y=1$ sea asíntota. Equivalentemente que su punto del infinito, el $(1,0,0)$ pertencezca a la cónica. La ecuación dela cónica en coordenadas homogéneas es:

$$(x+y)(x+y-2t)+\lambda(2x+y-1t)^2=0$$

Como el punto $(1,0,0)$ pertence a la misma obtenemos:

$$1+4\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1/4$$

Susyituyendo en la ecuacin y operando llegamos a:

$$3y^2+4xy-4x-6y-1=0.$$

X.– *En el plano afín euclídeo y referido a un sistema de referencia rectangular, determinar las cónicas que pasan por $P(0,2)$ y $Q(0,4)$, tienen una asíntota paralela a la recta $y-4x=0$ y cortan al eje OX en puntos A y B tales que $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=2$.*

(Examen extraordinario, septiembre 1998)

Supongamos que los puntos A y B son respectivamente el $(\alpha,0)$ y $(\beta,0)$. La condición $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=2.$ significa que $\alpha\beta=2$.

Consideramos el haz de cónicas pasando por P,Q,A,B:

$$\lambda PQ\cdot AB+\mu PA\cdot QB=0,$$

es decir,

$$\lambda xy+\mu(2x+\alpha y-2\alpha)(4x+\beta y-4\beta)=0$$

El hecho de tener una asíntota paralela a la recta $y-4x=0$ significa que pasa por el punto del infinito $(1,4,0)$. Sustituyendo (OJO: por ser punto impropio se eliminan los términos NO cuadráticos):

$$\lambda 1\cdot 4+\mu(2\cdot 1+\alpha\cdot 4)(4\cdot 1+\beta\cdot 4)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\mu(-10-4\alpha-2\beta)$$

Tomando $\mu=1$ y teniendo en cuenta que $\beta=2/\alpha$ la ecuación queda:

$$8x^2+2y^2-10xy-(8a+\frac{16}{a})x-12y+16=0$$

XI.– *Hallar la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto $(3,4)$, un foco en $(0,0)$ y excentricidad $e=5/6$.*

El segundo foco F' de la elipse es el simétrico del primero respecto del centro:

$$\frac{F'+(0,0)}{2}=(3,4) \quad \Rightarrow \quad F'=(6,8).$$

Usamos ahora la caracterización de la elipse como lugar geométrico: la suma de las distancias de un punto de la curva a los focos es constante igual a $2a$.

$$d((x,y),(0,0))+d((x,y),(6,8))=2a$$

Finalmente sabemos que $e=c/a$, es decir, $a=c/e$ y $c=d(foco,centro)=d((0,0),(3,4))=\sqrt{3^2+4^2}=5$. De donde:

$$a=c/e=5/(5/6)=6.$$

Por tanto la ecuación buscada es:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}=2\cdot 6$$

Operamos para simplificarla:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2-12x+36+y^2-16y+64}=12-\sqrt{x^2+y^2}\\
&x^2-12x+36+y^2-16y+64=144+x^2+y^2-24\sqrt{x^2+y^2}\\
&24\sqrt{x^2+y^2}=12x+16y+44\\
&6\sqrt{x^2+y^2}=3x+4y+11\\
&36(x^2+y^2)=(3x+4y-11)^2\\
&36x^2+36y^2=9x^2+16y^2+121+24xy+66x+88y\\
&27x^2-24xy+20y^2-66x-88y-121=0
\end{aligned}$$

XII.– *Para cada número real a definimos la cónica de ecuación:*

$$9x^2+ay^2-6axy+3a-12=0.$$

i) *Clasificar las cónicas dependiendo de los valores de a.*

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -3a & 0\\ -3a & a & 0\\ 0 & 0 & 3a-12\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} 9 & -3a\\ -3a & a\end{pmatrix}.$$

Vemos que:

$$|A|=(3a-12)(9a-9a^2)=27a(a-4)(1-a),\qquad |T|=9a-9a^2=9a(1-a).$$

Los puntos donde se anulan son $a=0,1,4$. Estudiamos los siguientes casos:

i) $a<0$. Se tiene que $|T|<0$ y $|A|>0$. Se trata de una hipérbola.

ii) $a=0$. Se tiene que $|T|=0$ y $|A|=0$. Se trata de rectas paralelas rales o imaginarias o coincidentes. En particular la ecuación queda:

$$9x^2-12=0 \iff (3x-\sqrt{12})(3x+\sqrt{12})=0.$$

Es decir se tratan de rectas paralelas reales.

iii) $0<a<1$. Se tiene que $|T|>0$ y $|A|<0$. Se trata de una elipse real.

iv) $a=1$. Se tiene que $|T|=0$ y $|A|=0$. Se trata de rectas paralelas rales o imaginarias o coincidentes. La matriz asociada queda:

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}.$$

Haciendo congruencia:

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}$$

y vemos que de nuevo se tratan de rectas paralelas reales.

v) $1<a<4$. Se tiene que $|T|<0$ y $|A|>0$. Se trata de una hipérbola.

vi) $a = 4$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| = 0$. Se tratan de rectas reales cortándose en un punto.

vii) $a > 4$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una hipérbola.

ii) *En aquellos casos en los que las cónicas sean degeneradas escribir las ecuaciones de las rectas que las forman.*

- Para $a = 0$. La ecuación es:

$$9x^2 - 12 = 0 \iff (3x - \sqrt{12})(3x + \sqrt{12}) = 0.$$

Luego el par de rectas paralelas son:

$$3x - \sqrt{12} = 0, \qquad 3x + \sqrt{12} = 0.$$

- Para $a = 1$. Sabemos que se trata de rectas paralelas a la recta de centros. Esta viene dada por la ecuación:

$$(x, y, 1)A = (0, 0, h) \iff 9x - 3y = 0 \iff 3x - y = 0.$$

Las rectas por tanto son de la forma $3x - y + c = 0$. Por otra parte si intersecamos la cónica con la recta $x = 0$ queda:

$$y^2 = 9 \iff y = \pm\sqrt{9}.$$

Por tanto el punto $(0, 3)$ pertenece a una paralela y $(0, -3)$ a la otra. Deducimos que tales rectas son:

$$3x - y + 3 = 0, \qquad 3x - y - 3 = 0.$$

- Para $a = 4$ el par de rectas cortándose pasa por el centro que cumple:

$$(x, y, 1)A = (0, 0, h) \iff \begin{aligned} 9x - 12y &= 0 \\ -12x + 9y &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el centro es $(x, y) = (0, 0)$. Cortamos ahora la cónica con la recta $x = 1$ y obtenemos:

$$9 + 4y^2 - 24y = 0$$

de donde:

$$y = 3 \pm 3\sqrt{3}/2$$

Las rectas buscadas pasan por el origen y respectivamente pos los puntos $(1, 3+3\sqrt{3}/2)$ y $(1, 3-3\sqrt{3}/2)$. Quedan:

$$(6 + 3\sqrt{3})x - 2y = 0, \qquad (6 - 3\sqrt{3})x - 2y = 0.$$

(1 puntos)

XIII.– *En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, calcular la ecuación de una cónica no degenerada cuyo único eje es la recta $y = 2x$ y es tangente a la recta $y = 0$ en el punto $(1, 0)$.*

Como es no degenerada y tiene un único eje ya sabemos que es una parábola. Calculemos el simétrico de la tangente con respecto al eje. Para ello hallamos la recta perendicular a este y pasando por $(1, 0)$.

El eje tiene vector director $(1, 2)$. Una recta perpendicular es de la forma:

$$x + 2y + c = 0.$$

Como pasa por $(1, 0)$ obtenemos:

$$1 + 2 \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1.$$

Intersecamos esta recta con el eje:

$$\begin{aligned} x + 2y - 1 &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (1/5, 2/5).$$

Ahora el simétrico P' del punto $P=(1,0)$ cumple:

$$\frac{P+P'}{2}=(1/5,2/5) \quad \Rightarrow \quad P'=(2/5,4/5)-(1,0)=(-3/5,4/5).$$

La recta simétrica de $y=0$ es la que une el punto P' con el origen:

$$4x+3y=0.$$

Entonces conocemos dos rectas tangente y sus puntos de tangencia P y P'. Planteamos el haz:

$$\lambda(tg_1\cdot tg_2)+PP'^2=0.$$

Queda:

$$\lambda(y(4x+3y))+(x+2y-1)^2=0 \iff x^2+(4+4\lambda)xy+(4+3\lambda)y^2-2x-4y+1=0.$$

Para hallar el parámetro imponemos que sea una parábola, es decir, el determinante de la matriz de términos cuadráticos ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+2\lambda \\ 2+2\lambda & 4+3\lambda \end{vmatrix}=0 \iff 4\lambda^2+5\lambda=0.$$

Aparecen dos soluciones $\lambda=0$ y $\lambda=-5/4$. La primera queda descartada porque corresponde a una cónica degenerada (recta doble). En definitiva la ecuación pedida es:

$$4x^2-4xy+y^2-8x-16y+4=0.$$

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

XIV.– *Calcular la ecuación de una elipse tangente a los ejes de coordenadas en los puntos* $(1,0)$ *y* $(0,1)$ *y tangente a la recta* $x+y-2=0$.

Método I: Utilizamos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y puntos de tangencia. Las dos cónicas generadoras son:

- Las dos tangentes: xy.

- La recta doble que une los puntos de tangencia $(1,0)$ y $(0,1)$: $(x+y-1)^2$.

El haz queda:

$$axy+(x+y-1)^2=0.$$

Para hallar el parámetro a imponemos que la recta $x+y-2=0$ sea tangente. Al intersecarla con la cónica ha de quedar una raíz doble. Despejamos $y=2-x$ y sustituimos en la cónica:

$$ax(2-x)+1=0 \iff ax^2-2ax-1=0.$$

Para que la ecuación de segundo grado tenga una única raíz doble el discriminate ha de ser 0:

$$4a^2+4a=0 \iff a=-1 \text{ ó } a=0.$$

Si $a=0$ la cónica es la recta doble y no se trata de una elipse.

Si $a=1$ queda:

$$x^2+y^2+xy-2x-2y+1=0.$$

La matriz asociada es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si llamamos T a la matriz de términos cuadráticos vemos que $|T| > 0$ y $|A| < 0$ y por tanto se trata de una elipse.

Método II: La matriz de la cónica que buscamos es una matriz simétrica 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Imponemos las condiciones que ha de cumplir, para obtener información sobre sus coeficientes.

- La recta $x = 0$ es tangente en el punto $(0, 1)$:

$$(0,1,1)A(x,y,1)^t = 0 \quad \equiv \quad x = 0 \iff (b+d)x + (c+e)y + (e+f) = 0 \quad \equiv \quad x = 0.$$

Obtenemos:

$$c + e = 0, \quad e + f = 0; \quad \text{ó equivalentemente} \quad c = f, \quad e = -f.$$

- La recta $y = 0$ es tangente en el punto $(1, 0)$:

$$(1,0,1)A(x,y,1)^t = 0 \quad \equiv \quad y = 0 \iff (a+d)x + (b+e)y + (d+f) = 0 \quad \equiv \quad y = 0.$$

Obtenemos:

$$a + d = 0, \quad d + f = 0; \quad \text{ó equivalentemente} \quad a = f, \quad d = -f.$$

La matriz ahora sabemos que es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} f & b & -f \\ b & f & -f \\ -f & -f & f \end{pmatrix},$$

y la correspondiente cónica:

$$fx^2 + 2bxy + fy^2 - 2fx - 2fy + f = 0.$$

- Finalmente utilizamos que la recta $x + y - 2 = 0$ es tangente. Por tanto al intersecar con la cónica slo ha de haber un punto de corte. Tomamos $y = 2 - x$ y sustituimos en la ecuación de la cónica. Operando queda:

$$2(f - b)x^2 - 4(f - b) + f = 0.$$

Para que tenga una única solución el discriminante ha de ser 0:

$$16(f - b)^2 - 8f(f - b) = 0.$$

Hay dos opciones $f = b$ ó $b = f/2$. Tomando $f = 1$ las correspondientes matrices serían:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero la primera es degenerada, mientras que la segunda es la elipse que buscábamos.

(Segundo parcial, junio 2007)