ÁLGEBRA LINEAL II — Solución a la práctica 3.1-3.2

Geometría afín. (Curso 2019–2020)

1.– *En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera la referencia canónica R y la referencia $R' = \{(1,0,1);(1,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\}$. Denotamos respectivamente por (x,y,z) y (x',y',z') a las coordenadas de un punto respecto a la referencias R y R'. Hallar las ecuaciones del plano $x+y-2z+1=0$ en la referencia R'.*

Las ecuaciones de cambio de referencia son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + M_{CB}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \qquad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación del plano puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1 = 0.$$

Sustituimos usando la ecuación de cambio de referencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + M_{CB}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) + 1 = 0.$$

Operando queda:

$$-1 + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 1 = 0$$

y simplificando:

$$2x' + z' = 0.$$

2.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos $A(2,-1,1)$, $B(-1,0,3)$, las rectas*

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0, \quad Q : x + 5y - 6z - 4 = 0.$

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(a) *Recta paralela a r que pasa por A.*

El vector director es el de r, es decir, $(3,1,1)$ y pasa por $A(2,-1,1)$. Por tanto su ecuación continua es:

$$\frac{x-2}{3} = y + 1 = z - 1$$

(b) *Recta que pasa por B y es paralela a P y Q.*

Hay que hallar la intersección de las direcciones de los planos P y Q. Para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 0 \\ x + 5y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x = -8z/17$, $y = 22z/17$ y la dirección que buscamos es por tanto la determinada por el vector $(-8, 22, 17)$.

Podemos calcularlo de otra forma. Sabemos que $(3, -2, 4)$ y $(1, 5, -6)$ son los vectores normales (ortogonales) a los planos P y Q respectivamente. Por tanto la dirección que buscamos es perpendicular a ambos y así corresponde al producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -8\bar{e}_1 + 22\bar{e}_2 + 17\bar{e}_3$$

Ahora la recta que buscamos es:

$$\frac{x+1}{-8} = \frac{y}{22} = \frac{z-3}{17}$$

(c) *Plano paralelo a P que pasa por A.*

Tiene la misma dirección que P y por tanto es de la forma

$$3x - 2y + 4z + \lambda = 0$$

Imponemos que pase por el punto $A(2, -1, 1)$, y obtenemos $\lambda = -12$. El plano buscado es:

$$3x - 2y + 4z - 12 = 0$$

(d) *Plano que pasa por B y es paralelo a r y s.*

La dirección del plano está generada por los vectores directores de r y s, es decir, $(3, 1, 1)$ y $(1, 2, -3)$. Por tanto el vector normal (perpendicular) del plano será el producto vectorial de ambos:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

El plano será de la forma

$$-5x + 10y + 5z + \lambda = 0$$

Imponiendo que pase por $B(-1, 0, 3)$ queda $\lambda = -20$, y el plano es

$$-x + 2y + z - 4 = 0$$

Otra forma de calcularlo directamente es tomar los puntos (x, y, z) de manera que el vector que los une con B sea linealmente dependiente de los vectores directores:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

(e) *Recta perpendicular a Q y que pasa por A.*

Por ser perpendicular a Q el vector director de la recta es el normal al plano Q, es decir, $(1, 5, -6)$. Por tanto la recta pedida tiene por ecuación:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-6}$$

(f) *Plano perpendicular a s y que pasa por B.*

El vector normal al plano que buscamos será el vector director de s, es decir, $(1, 2, -3)$. La ecuación del plano es de la forma:

$$x + 2y - 3z + \lambda = 0$$

e imponiendo que $B(-1, 0, 3)$ esté en el plano, queda $\lambda = 10$:

$$x + 2y - 3z + 10 = 0$$

(g) *Recta que pasa por A y es perpendicular a r y a s.*

Si la recta es perpendicular a r y s su vector director será el producto vectorial de los vectores directores de r y s. Lo hemos calculado en (d): $(-5, 10, 5)$. La ecuación de la recta buscada es:

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-1}{5}$$

(h) *Plano perpendicular a P y Q y que pasa por B.*

Si el plano es perpendicular a P y Q su dirección está generada por los vectores normales a ambos. El plano buscado viene dado entonces por la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0 \iff -8x + 22y + 17z - 59 = 0$$

(i) *Plano que contiene a r y es perpendicular a P.*

Por contener a r su dirección contiene al vector director de r, $(3, 1, 1)$. Además por ser perpendicular a P su dirección también contiene al vector normal a P, $(3, -2, 4)$. Por último tomamos un punto cualquiera de r que estará también en el plano que buscamos. Por ejemplo $(-1, 2, 0)$. Ahora la ecuación pedida es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff 6x - 9y - 9z + 24 = 0 \iff 2x - 3y - 3z + 8 = 0$$

(j) *Recta que pasa por A, es perpendicular a s y paralela a Q.*

El vector director de la recta pedida es paralelo a la dirección de Q y por tanto perpendicular a su vector normal $(1, 5, -6)$. También es perpendicular al vector director de s, $(1, 2, -3)$. Por tanto podemos tomar como dirección de la recta buscada el producto vectorial de ambos:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$$

La recta buscada es:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-3} \iff x - 2 = y + 1 = z - 1$$

(k) *Recta que contiene a B, es paralela a Q y corta a r.*

Tomaremos un plano π paralelo a Q y que pase por B. La recta que buscamos pasará por B y por el punto de corte de r y π.

Primero calculamos π:

$$x + 5y - 6z + \lambda = 0$$

Imponiendo que pase por B, $\lambda = 19$. Ahora intersecamos tal plano con r. Un puntos de r es de la forma $(-1+3\mu, 2+\mu, \mu)$. Ha de verificar la ecuación del plano π:

$$(-1+3\mu) + 5(2+\mu) - 6\mu + 19 = 0$$

Obtenemos $\mu = -14$ y el punto de corte de r y π es $(-43, -12, -14)$. Ahora la recta pedida es la que une este punto con B:

$$\frac{x+1}{-43+1} = \frac{y}{-12} = \frac{z-3}{-14-3} \iff \frac{x+1}{-42} = \frac{y}{-12} = \frac{z-3}{-17}$$

(l) *Recta que corta a r y a s y pasa por B.*

Calcularemos los planos π_1 y π_2 que pasan por r y B y s yB; la recta pedida es la intersección de ambos.

En concreto la dirección del plano π_1 viene dada por los vectores $(3, 1, 1)$ y $(-1, 2, 0) - B = (0, 2, -3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3$$

Análogamente, la dirección del plano π_2 viene dada por los vectores $(1, 2, -3)$ y $(0, 0, 0) - B = (1, 0, -3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$$

Ahora la dirección de la recta intersección de π_1 y π_2 es el producto vectorial de sus direcciones normales:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -5 & 9 & 6 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9\bar{e}_1 - 23\bar{e}_2 + 27\bar{e}_3$$

Por tanto la recta buscada es:

$$\frac{x+1}{-9} = \frac{y}{-23} = \frac{z-3}{+27}$$

(m) *Recta paralela a la dirección dada por $\bar{v}(1, 1, 2)$ y que corta a las rectas r y s.*

Un punto de r es de la forma $(-1+3a, 2+a, a)$ y uno de s de la forma $(b, 2b, -3b)$. Debemos de fijar dos puntos de manera que el vector que los une sea paralelo a $\bar{v}(1, 1, 2)$:

$$\frac{-1+3a-b}{1} = \frac{2+a-2b}{1} = \frac{a+3b}{2}$$

de donde $a = 17/15$ y $b = 11/15$. Por tanto la recta que buscamos pasa por el punto $(11/15, 22/15, -33/15)$ y su ecuación es:

$$\frac{x-11/15}{1} = \frac{y-22/15}{1} = \frac{z-33/15}{2}$$

Otra forma de hallar esta recta es considerar el plano π definido por la direción $\bar{v}$ y la recta r. Luego intersecamos dicho planos con s y tendremos un puntos de la recta que buscamos.

Así la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x + 5y - 2z - 11 = 0$$

Calculamos la intersección con s; tomamos un punto de dicha recta $(b, 2b, -3b)$. Intersecamos con el plano:

$$-b + 10b + 6b - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 11/15$$

vemos que obtenemos de nuevo el punto calculado anteriormente. Ahora conocido un punto y la dirección la ecuación de la recta que buscamos es inmediata.

(n) *Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.*

Las rectas que pasan por A y son perpendiculares a r, están en el plano que pasa por A y es perpendicular a r. Dicho plano tiene por vector normal el director de r, $(3, 1, 1)$. Así su ecuación será:

$$3x + y + z + \lambda = 0$$

Imponiendo que $A(2, -1, 1)$ verifique la ecuación, obtenemos $\lambda = -6$.

Ahora como la recta que buscamos ha de cortar a s, calculamos la intersección de s con este plano. Un punto de s es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación del plano:

$$3a + 2a - 3a - 6 = 0$$

vemos que $a = 3$. Por tanto la recta que buscamos es la que une los puntos $A(2, -1, 1)$ y $(3, 6, -9)$:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{6+1} = \frac{z-1}{-9-1} \iff x - 2 = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-10}$$

(o) *Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.*

Los vectores directores del plano que buscamos son el normal a P, $(3, -2, 4)$ y el director de r, $(3, 1, 1)$. Además ha de pasar por $A(2, -1, 1)$. Por tanto la ecuación pedida viene dada por la anulación del determinante:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -6x + 9y + 9z + 12 = 0 \iff 2x - 3y - 3z - 4 = 0$$

(p) *Perpendicular común a r y s.*

La recta que buscamos esta contenida en los planos π_1 y π_2 definidos por r y s y la dirección perpendicular a ambos respectivamente. Por tanto es la intersección de estos dos planos. Lo que haremos es caclular el plano π_1 e intersecarlo con s para conocer un punto de la recta que buscamos. Calcularemos también la direción ortogonal a ambas rectas.

La dirección perpendicular a r y s, la obtenemos haciendo el producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

Podemos tomar para simplificar la dirección $(-1, 2, 1)$. Ahora la ecuación del plano π_1 es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x - 4y + 7z + 7 = 0$$

Intersecamos con s. Un punto de esta recta es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación de π:

$$-a - 8a - 21a + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 7/30$$

Por tanto el puntos de intersección de la recta buscada con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. La ecuación de la recta pedida es:

$$\frac{x - 7/30}{-1} = \frac{y - 7/15}{2} = \frac{z + 7/10}{1}$$

(q) *Distancias de A a B, de A a r, de B a P y de r a s.*

La distancia de A a B se obtiene directamente:

$$d(A,B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{14}$$

La distancia de A a r se obtiene mediante la fórmula:

$$d(A,r) = \frac{\|\overline{AC} \wedge \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|}$$

donde C es un punto de r y v su vector director. En este caso, $C(-1,2,0)$, $\bar{v}(3,1,1)$.

$$d(A,r) = \frac{\|(-3,3,-1) \wedge (3,1,1)\|}{\|(3,1,1)|} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{143}}{11}$$

Observación: Si no recordamos la fórmula, se puede calcular el plano perpendicular a r pasando por A. La intersección de dicho plano con r nos da un punto M que es la proyección de A sobre r. La distancia pedida es la distancia entre A y M.

La distancia de B a P viene dada por la expresión:

$$d(B,P) = \frac{3\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 3 + 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{17}{\sqrt{29}} = \frac{17\sqrt{29}}{29}$$

Observación: De nuevo si queremos reducir el cálculo a la distancia entre dos puntos, hallamos el punto de corte de la recta perpendicular al plano y que pasa por B con el plano P.

Por último para calcular la distancia entre r y s, hallamos el punto de corte de la perpendicular a ambas con alguna de las rectas. Vimos en el apartado (p) que el punto de corte con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. Ahora la distancia pedida es la de este punto a la recta r:

$$d(r,s) = \frac{\|(7/30+1, 7/15-2, -7/10) \wedge (3,1,1)\|}{\|(3,1,1)|} = \frac{5\sqrt{66}/6}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Otra forma es usar directamente la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|[(-1,2,0)-(0,0,0),(3,1,1),(1,2,-3)]|}{\|(3,1,1) \wedge (1,2,-3)\|} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

(r) *Ángulos formados por r y s, por s y Q y por P y Q.*

El ángulo formado por r y s es el ángulo formado por sus direcciones:

$$cos(\alpha(r,s)) = \frac{|((3,1,1)(1,2,-3))|}{\|(3,1,1)\|\|(1,2,-3)\|} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(r,s) = 80,72^o$$

El ángulo formado por s y Q es el complementario del que forman la direción normal a Q y la dirección de s. Por tanto:

$$sin(\alpha(s,Q)) = \frac{|((1,2,-3)(1,5,-6))|}{\|(1,2,-3)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{29}{\sqrt{14}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(s,Q) = 79,84^o$$

El ángulo formado por P y Q es el que forman sus direciones normales:

$$cos(\alpha(P,Q)) = \frac{|((3,-2,4)(1,5,-6))|}{\|(3,-2,4)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{31}{\sqrt{29}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(P,Q) = 43,02^o$$

3.– *En el espacio afín dar la ecuación de una recta pasando por el punto $P = (1, 0, 1)$ y que corta perpendicularmente a la recta:*

$$s \equiv \begin{cases} y + z = 4 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Hallar también la distancia entre P y s.

Calcularemos el plano π perpendicular a s y pasando por el punto P, que contiene a la recta buscada.

Después hallamos $Q = \pi \cap S$ y finalmente la recta pedia es la recta PQ.

Las ecuaciones paramétricas de s, resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones impícitas son:

$$x = -1 + 3t, \quad y = 4 - t, \quad z = t.$$

Por tanto el vector director de s es $u_s = (3, -1, 1)$ y un plano perpendicular a ella es de la forma $3x - y + z + d = 0$. Imponemos que pase por $P = (1, 0, 1)$, $3 \cdot 1 - 0 + 1 + d = 0$, de donde , $d = -4$ y $\pi \equiv 3x - y + z - 4 = 0$.

Ahora para hallar $Q = \pi \cap S$ sustituimos las ecuaciones paramétricas de S en el plano π:

$$3(-1 + 3t) - (4 - t) + t - 4 = 0 \iff 11t - 11 = 0 \iff t = 1.$$

Luego $Q = (-1 + 3 \cdot 1, 4 - 1, 1) = (2, 3, 1)$.

La recta pedida es la recta PQ:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{3-0} = \frac{z-1}{1-1} \iff \begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ \qquad z - 1 = 0 \end{cases}$$

La distancia del punto P a la recta s es precisamente la distancia entre los puntos P y Q:

$$d(P, s) = d(P, Q) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{10}.$$

4.– *En el espacio afín euclideo con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se tienen los puntos:*

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (2, 2, 2).$$

(i) *Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $x + z = 0$, para que el triángulo ABC sea equilátero.*

Por ser ABC un triángulo equilátero, las coordenadas (a, b, c) de C deben de equidistar de A y C:

$$d(A, C) = d(B, C) \iff \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y operando se obtiene $a + b + c = 3$.

Análogamente A tiene que equidistar de B y C:

$$d(A, B) = d(A, C) \iff \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2}$$

Simplificando queda $a^2 + b^2 + c^2 = 12$.

Finalmente las coordenadas de C tienen que cumplir la ecuación del plano $x + z = 0$, es decir, $a + c = 0$.

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 = a + b + c \\ 12 = a^2 + b^2 + c^2 \\ 0 = a + c \end{cases}$$

De la primera y tercera ecuación se obtiene $b = 3$. Sustituyendo en la segunda y teniendo en cuenta la tercera queda:

$$3 = 2a^2$$

De donde $a = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ y $c = -a$. Se obtienen así dos posibles soluciones:

$$C = (-\frac{\sqrt{6}}{2}, 3, \frac{\sqrt{6}}{2}) \text{ ó } C = (\frac{\sqrt{6}}{2}, 3, -\frac{\sqrt{6}}{2}).$$

(ii) *Calcular el área del triángulo ABC.*

El área es:

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{A}C \times AB\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \pm\sqrt{6}/2 & 3 & \mp\sqrt{6}/2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\|(6 \pm \sqrt{6}, \pm 2\sqrt{6}, \pm\sqrt{6} - 6)\| = \frac{1}{2}\sqrt{108} = 3\sqrt{3}.$$

También podría usarse que el área de un triángulo equilátro de lado l es:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

En nuestro caso $l = d(A, B) = \sqrt{12}$ y así:

$$A = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}.$$

(iii) *Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el punto A en el punto B y cuadriplique el área del triángulo.*

Dado que cuadriplica el área la razón k de la homotecia cumple $k^2 = 4$ y así $k = \pm 2$. Si O es el centro de la homotecia la ecuación de la misma es:

$$t(X) = O + k(X - O)$$

Dado que lleva el punto A sobre el B:

$$B = O + k(A - O) \iff B - kA = (1 - k)O$$

De donde:

$$O = \frac{B - kA}{1 - k}$$

Si $k = 2$ entonces $O = \frac{(2, 2, 2)}{1 - 2} = (-2, -2, -2)$ y la ecuación de la homotecia queda:

$$t(x, y, z) = (-2, -2, -2) + 2(x + 2, y + 2, z + 2).$$

Si $k = -2$ entonces $O = \frac{(2, 2, 2)}{1 + 2} = (2/3, 2/3, 2/3)$ y la ecuación de la homotecia queda:

$$t(x, y, z) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - 2(x - \frac{2}{3}, y - \frac{2}{3}, z - \frac{2}{3}).$$

5.– *En el espacio afín* $\mathbb{R}^3$ *se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la distancia entre el punto $(-4, 1, 0)$ *y la recta* r *de ecuaciones:*

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Aunque sabemos que hay una fórmula directa para hallar la distancia de un punto a un plano en el espacio, no es aconsejable usarla porque utiliza el prodcuto vectorial y el método de cáclulo habitual de mismo no es válido bajo productos escalares distintos del usual.

Entonces para calcular la distancia hallaremos directamente un punto Q en la recta r de forma que el vector que lo une con $P = (-4, 1, 0)$ sea ortogonal a la recta. En ese caso sabemos que $d(P, r) = d(P, Q)$.

Comenzamos hallando las ecuaciones paramétricas de la recta resolviendo en función de un parámetro el sistema formado por sus dos ecuacioens implícitas. Sumándolas obtenemos $x = 2$ y después de la primera $y = z - 1$. Nos queda:

$$x = 2, \quad y = \lambda - 1, \quad z = \lambda.$$

Vemos también que el vector director de la recta es $(0, 1, 1)$.

Ahora un punto Q de la recta será:

$$Q = (2, \lambda - 1, \lambda)$$

Imponemos que PQ sea ortogonal a $(0, 1, 1)$:

$$PQ = Q - P = (6, \lambda - 2, \lambda)$$

y

$$0 = PQ \cdot (0, 1, 1) = (6, \lambda - 2, \lambda) G_C (0, 1, 1)^t = 6\lambda$$

Deducimos que $\lambda = 0$ y:

$$d(P, r) = d(P, Q) = \|PQ\| = \|(6, -2, -0)\| = \sqrt{(6, -2, 0) G_C (6, -2, 0)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

6.– *En el espacio afín calcular las ecuaciones de un giro de* 90^o *respecto a la semirrecta de ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(3, 0, 4), \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0.$$

(1.2 puntos)

Las ecuaciones de giro son:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

donde T_C es la matriz de giro de semieje generado por $(3, 0, 4)$ y ángulo 90^o.

Para hallar la matriz T_C construimos una base ortonormal B bien orientada donde el primer vector será el generador del semieje normalizado:

- Buscamos un vector $\vec{u}_2$ perpendicular a $(3,0,4)$:

$$(x,y,z)\cdot(3,0,4)=0 \iff 3x+4z=0$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_2=(0,1,0)$.

- Buscamos un segundo vector $\vec{u}_3$ perpendicular a $(3,0,4)$ y $(0,1,0)$:

$$\begin{aligned}(x,y,z)\cdot(3,0,4)=0 &\iff 3x+4z=0\\ (x,y,z)\cdot(0,1,0)=0 &\iff y=0\end{aligned}$$

Tomamos $\vec{u}_3=(-4,0,3)$.

Comprobamos si la base $\{(3,0,4),(0,1,0),(-4,0,3)\}$ tiene orientación positiva:

$$det\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}=25>0 \quad\Rightarrow\quad \text{Orientación positiva.}$$

Normalizamos los vectores:

$$\frac{(3,0,4)}{\|(3,0,4)\|}=(3/5,0,4/5),\quad \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|}=(0,1,/0),\quad \frac{(-4,0,3)}{\|(-4,0,3)\|}=(-4/5,0,3/5)$$

Tenemos una base $B=\{(3/5,0,4/5),(0,1,0),(-4/5,0,3/5)\}$ ortonormal bien orientada. En esa base la matriz de giro de $\alpha=90^o$ es:

$$T_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\,\alpha & -sin\,\alpha\\ 0 & sin\,\alpha & cos\,\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

En la base canónica será:

$$T_C=M_{CB}T_BM_{BC}=M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB}=\begin{pmatrix}3/5 & 0 & -4/5\\ 0 & 1 & 0\\ 4/5 & 0 & 3/5\end{pmatrix}$$

Usamos además que por ser C y B ambas ortonormales, $M_{CB}^{-1}=M_{CB}^t$. Operando queda:

$$T_C=M_{CB}T_BM_{CB}^t=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}9 & -20 & 12\\ 20 & 0 & -15\\ 12 & 15 & 16\end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones del giro son:

$$f\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\frac{1}{25}\begin{pmatrix}9 & -20 & 12\\ 20 & 0 & -15\\ 12 & 15 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

7.– *En el espacio afín calcular las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que transforme el punto* $(2,1,0)$ *en* $(0,1,2)$.

El plano de simetría es el plano que equidista del punto original y su simétrico; equivalentemente el plano que pasa por el punto medio de ambos y cuya normal es el vector que los une. Tenemos:

$$M = \frac{(2,1,0)+(0,1,2)}{2} = (1,1,1), \qquad (2,1,0)-(0,1,2) = (2,0,-2).$$

El plano es de la forma $2x-2z+d=0$ e imponiendo que pase por $(1,1,1)$, $2\cot 1 - 2\cdot 1 + d = 0$, es decir, $d=0$. Queda $x-z=0$.

Dado que el plano pasa por el origen las ecuaciones de la simetría son de la forma:

$$f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x-0\\ y-0\\ z-0\end{pmatrix}$$

es decir, simplemente:

$$f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

donde T es la matriz de la simetría respecto al subespacio $x-z=0$.

Para hallar esa matriz construimos una base B formada por una base del plano y su ortgonoal:

$$B = \left\{\underbrace{(1,0,1),(0,1,0)}_{plano}, \underbrace{(1,0,-1)}_{plano^{\perp}}\right\}.$$

En tal base la matriz de la simetría es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Y en la base canónica:

$$T_C = M_{CB}T_BM_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones quedan:

$$f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \iff f(x,y,z) = (z,y,x).$$

8.– *En el plano afín euclideo hallar las ecuaciones de una simetría que lleva la recta* $x=0$ *en la recta* $3x+4y-4=0$. *¿Es única la solución?.*

El eje de simetría equidista de la recta original y su simétrica. Equivalentemente es cualquiera de las dos bisectrices de los dos ángulos que éstas determinan. Por tanto es claro que hay dos posibles soluciones.

Para hallar las bisectrices igualamos las distancias de un punto arbitario a ambas rectas:

$$\frac{|x|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{|3x+4y-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

Simplificando:

$$5|x| = |3x + 4y - 4|$$

de donde o bien:

$$5x = 3x + 4y - 4 \iff 2x - 4y + 4 = 0 \iff x - 2y + 2 = 0,$$

o bien:

$$-5x = 3x + 4y - 4 = 0 \iff 8x + 4y - 4 = 0 \iff 2x + y - 1 = 0.$$

Calculemos por ejemplo las ecuaciones de la simetría respecto a la recta $2x + y - 1 = 0$. Escogemos un punto cualquiera de la misma (verificando la ecuación que la define) por ejemplo $P = (0, 1)$.

Las ecuaciones de la simetía son entonces:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + T_c\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$$

donde $T - c$ es la matriz de la simetría. Para hallar lal matriz tomamos una base B donde el primer vector el director del eje de simetría y el segundo ortogonal a el. El vector normal del eje es $(2, 1)$ y por tanto el director $(1, -2)$. Consideramos entonces la base B:

$$B = \{(1, -2), (2, 1)\}$$

Es esta base sabemos que:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La pasamos a la base canónica:

$$T_C = M_{CB}T_B(M_{CB})^{-1})$$

donde $M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Operando resulta:

$$T_C = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & \\ -4/5 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

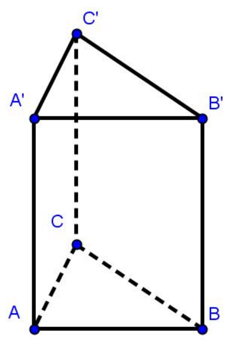
Finalmente la ecuación de la simetría queda:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & \\ -4/5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$$

9.– *En el espacio afín se considera el prisma recto triangular de vértices $ABCA'B'C'$. Se sabe que:*

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (2, 0, 1), \quad Volumen = 2,$$

y que el plano $x = 0$ no corta al prisma.



(i) *Calcular el área del prisma.*

El área del prisma es el doble del área de la base más el área lateral. El área lateral es el perimétro del triángulo base por la altura.

El área de la base es:

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}\|AB \times AC\| = \frac{1}{2}\|(1,0,-1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

El perímetro de la base es:

$$P = \|AB\| + \|BC\| + \|AC\| = \|(0,1,0)\| + \|(1,-1,1)\| + \|(1,0,1)\| = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Y la altura:

$$h = \frac{volumen}{Area(ABC)} = 2\sqrt{2}.$$

Por tanto el área del prisma es:

$$2Area(ABC) + P \cdot h = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4 = 4 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = 13.1416\ldots.$$

(ii) *Calcular las coordenadas de los vértices A', B', C'. ¿Es única?.*

Para calcular las coordenadas de A', B', C' sumaremos a cada uno de los vértices A, B, C un vector ortogonal a la base y de norma la altura del prisma h calculada en el apartado anterior.

Un vector ortogonal a la base y de norma h se obtiene como:

$$\pm h \cdot \frac{AB \times AC}{\|AB \times AC\|} = \pm 2\sqrt{2} \cdot \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \pm(2,0,-2).$$

Podría haber por tanto dos posibilidaes para los vértices A', B', C':

$$A' = A + (2,0,-2) = (3,0,-2), \quad B' = B + (2,0,-2) = (3,1,-2), \quad C' = C + (2,0,-2) = (4,0,-1),$$

ó

$$A' = A - (2,0,-2) = (-1,0,2), \quad B' = B - (2,0,-2) = (-1,1,2), \quad C' = C + (2,0,-2) = (0,0,3).$$

Pero teniendo en cuenta que el plano $x = 0$ NO CORTA al prisma, no puede haber vértices con coordenada x de distinto signo (ya que en ese caso el segemento que los une cortarí a tal plano); por tanto la única posibilidad es la primera, en la cual, todas las abcisas de los puntos del prisma son positivas:

$$A' = A + (2,0,-2) = (3,0,-2), \quad B' = B + (2,0,-2) = (3,1,-2), \quad C' = C + (2,0,-2) = (4,0,-1),$$

Deducimos por consiguiente que la solución es única.

(iii) *Decidir razonadamanete si existe un giro que lleve los vértices A, B, C respectivamente en B, C, A. En caso afirmativo hallar el eje de giro.*

El giro debiera de llevar el segmento AB en el segmento BC. Pero:

$$\|AB\| = \|(0,1,0)\| = 1, \qquad \|BC\| = \|(1,-1,1)\| = \sqrt{3}.$$

Un giro debiera de conservar las distancias; como $\|AB\| \neq \|BC\|$ es imposible que exista un giro en las condiciones indicadas.

10.– *Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el triángulo ABC en $A'B'C'$ sabiendo que:*

$$A = (1,1), \quad B = (3,2), \quad C = (2,4), \quad A' = (2,3), \quad superficie(A'B'C') = 10.$$

Una homotecia de razón k modifica las áreas con razón k^2. Por tanto:

$$k^2 = \frac{sup(A'B'C')}{sup(ABC)}.$$

Para hallar el área de ABC consideramos sus puntos situados en el plano $z = 0$ y utilizamos la interpretación geométrica del producto vectorial:

$$sup(ABC) = \frac{1}{2}\|AB \times AC\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3-1 & 2-1 & 0 \\ 2-1 & 4-1 & 0 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|(0,0,5)\| = \frac{5}{2}.$$

Por tanto:

$$k^2 = \frac{10}{5/2} = 4 \qquad \Rightarrow \qquad k = \pm 2.$$

Por otra parte una razón de centro (x_0, y_0) y razón k tiene por ecuación:

$$t(x,y) = (x_0, y_0) + k(x - x_0, y - y_0)$$

Imponemos que $t(A) = A'$:

$$t(1,1) = (2,3) \quad \Rightarrow \quad (x_0, y_0) + k(1 - x_0, 1 - y_0) = (2,3) \quad \Rightarrow \quad (x_0, y_0) = \frac{1}{1-k}(2-k, 3-k).$$

Por tanto tenemos dos posibles homotecias:

- Para $k = 2$, la homotecia de centro $(0, -1)$ y razón 2 de ecuación:

$$t(x,y) = (0,-1) + 2(x - 0, y + 1) = (0,1) + 2(x,y)$$

- Para $k = -2$, la homotecia de centro $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ y razón -2 de ecuación:

$$t(x,y) = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}) - 2(x - \frac{4}{3}, y - \frac{5}{3}) = (4,5) - 2(x,y)$$

11.– *En el espacio afín consideramos una pirámide regular de base cuadrada. Denotamos por A, B, C, D a los cuatro vértices de la base y por E al vértice superior. Sabiendo que la base está contenida en el plano $z = 0$, que $A = (0,0,0)$ y $C = (4,2,0)$ son vértices opuestos de la base y que la altura del pirámide es 5 calcular:*

(i) *Las coordenadas de los tres vértices restantes.*

La longitud de la diagonal d del cuadrado es la distancia entre A y C:

$$d = d(A,C) = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{20}.$$

Por el Teorema de Pitágoras el lado l del cuadrado cumple:

$$l^2 + l^2 = d^2 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}.$$

Los vértices B y D distan de C y A la distancia l. Además por estra en el plano $z = 0$ son de la forma $(a, b, 0)$. Por tanto planteamos las ecuaciones:

$$d(B,A) = \sqrt{10} \iff \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{10} \iff a^2 + b^2 = 10$$
$$d(B,C) = \sqrt{10} \iff \sqrt{(a-4)^2 + (b-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{10} \iff a^2 - 8a + 16 + b^2 - 4b + 4 = 10$$

Restando las ecuaciones:

$$8a + 4b = 20 \quad \Rightarrow \quad b = 5 - 2a$$

Sustituyendo en $a^2 + b^2 = 10$:

$$a^2 + (5-2a)^2 = 10 \iff 5a^2 - 20a + 15 = 0 \iff a^2 - 4a + 3 = 0 \iff$$
$$\iff a = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 12}}{2} \iff a = 1 \text{ ó } a = 3.$$

Si $a = 1$ entoncse $b = 5 - 2 \cdot 1 = 3$ y si $a = 3$ entonces $b = 5 - 2 \cdot 3 = -1$.

Los vértices B y D son $B = (1, 3, 0)$ y $D = (3, -1, 0)$.

El vértice E está sobre el punto medio M de la base, que es el punto medio de A y D y a altura 5:

$$M = \frac{A + C}{2} = (2, 1, 0).$$

Dado que el vector $(0, 0, 1)$ es unitario y perpendicular a la base

$$E = M \pm 5(0, 0, 1) = (2, 1, \pm 5).$$

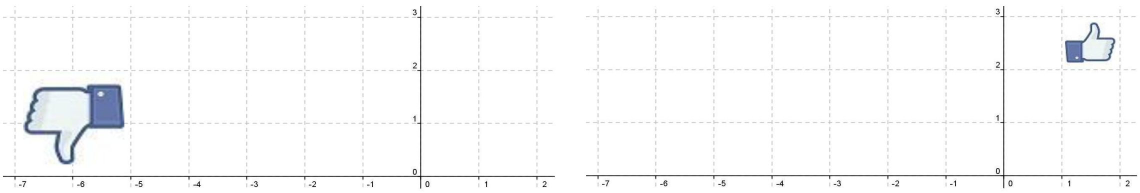
(hay dos posibles soluciones para el vértice E).

(ii) *El volumen de la pirámide.*

El volumen de una pirámide es:

$$V = \frac{\text{área base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{l^2 \cdot h}{3} = \frac{10 \cdot 5}{3} = \frac{50}{3}.$$

12.– *Dar la ecuación de una homotecia que transforme una figura en otra:*



Si observamos la figura inicial y la final, vemos que están inscritas en un cuadrado de lado 2 y lado 1 respectivamente. Además una se encuentra girada 180 grados respecto a la otra. Deducimos que se tratará de una homotecia de razón $r = -1/2$. El centro de la homotecia puede obtenerse como la intersección de un par de rectas que unan un punto con su transformado.

El punto $(-5, 2)$ se transforma en $(1, 2)$ y la recta que los une es $y = 2$.

El punto $(-5, 0)$ se transforma en $(1, 3)$ y la recta que los une es $\dfrac{x-1}{-5-1} = \dfrac{y-3}{0-3}$; simplificando $x - 2y + 5 = 0$.

Intersecando ambas rectas obtenemos que el centro de la homotecia es $(-1, 2)$.

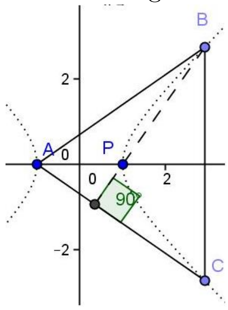
La ecuación de la homotecia queda por tanto:

$$t(x, y) = (-1, 2) - \frac{1}{2}((x, y) - (-1, 2)) = (-\frac{3}{2}, 3) - \frac{1}{2}(x, y).$$

13.– *En el plano afín sean los puntos $A(-1,0)$ y $P(1,0)$. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos B del plano tales que AB sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es P. ¿Qué tipo de curva es?.+*

Hay dos posibles interpretaciones:

- Los lados iguales son AB y AC, y por tanto el ángulo desigual el A:



En un triángulo isósceles la recta que une el vértice del ángulo desigual con el ortocentro es un eje de simetría. En nuestro caso tal recta, la que une A y P, es el eje OX. Si B tiene coordenadas (x,y) su simétrico respecto al eje OX es el punto C, $(x,-y)$, de forma que los tres vértices del triángulo son ABC.

Para que P sea el ortocentro el lado AC ha de ser perpendicular a la altura de vértice B, es decir, al vecotr BP. Por tanto:

$$\vec{AC}\cdot\vec{BP}=0$$

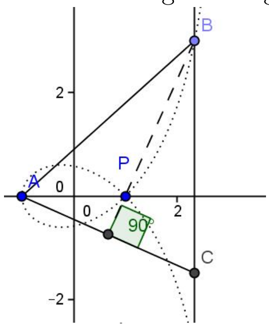
es decir:

$$(x-(-1),-y-0)\cdot(1-x,0-y)=0 \iff (1+x)(1-x)+y^2=0 \iff x^2-y^2=1$$

Vemos que la ecuación del lugar geométrico pedido corresponde a la hipérbola:

$$x^2-y^2=1.$$

- Los lados iguales son AB y BC y por tanto el ángulo desigual B:



La altura sobre el lado BC es la recta que une A con el ortocentro; por tanto BC es perpendicular al eje OX. Así si B tiene coordenadas (x,y) entonces C tiene coordenadas (x,y').

Dado que la distancia AB es la misma que BC:

$$(x+1)^2+y^2=(y-y'^2) \quad\iff\quad (x+1)^2=y'^2-2yy'$$

Por otra parte la recta BP tiene que ser perpendicular la lado AC, es decir:

$$\vec{AC}\cdot\vec{BP}=0 \iff (x-(-1),-y-0)\cdot(1-x,0-y')=0 \iff (1+x)(1-x)+yy'=0 \iff x^2-1+yy'=0$$

Despejando y' en la segunda ecuacin y sustiyuendo en la primera se tiene:

$$(x+1)^2=\frac{(1-x^2)^2}{y^2}-2(1-x^2)$$

Dividiendo por $x+1$:

$$(x+1) = \frac{(x^2-1)(x-1)}{y^2} + 2(x-1)$$

Quitando denominadores y simplificando obtenemos

$$x^3 - x^2 - x + 1 - xy^2 - 3y^2 = 0,$$

que es la ecuación de una cúbica.

14.– *En el plano afín se considera la circunferencia $c : (x-3)^2 + y^2 = 3^2$ y la recta $r : y - 3 = 0$. Para cada recta h pasando por el origen, sea A el punto de intersección (distinto del origen) de c y h y B el punto de intersección de r y h. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos de intersección de la paralela al eje OX por A y la paralela al eje OY por B.*

La circunferencia tiene centro $(3,0)$ y radio 3; la ecuación simplificada es: $x^2 - 6x + y^2 = 0$.

Tomamos una recta arbitraria h pasando por el origen $x = ay$ (notamos que la recta $y = 0$ no hace falta considerarla porque no corta a r).

Hallamos el punto de corte entre c y h.

$$\begin{cases} 0 = x^2 - 6x + y^2 \\ x = ay \end{cases}$$

Queda:

$$a^2y^2 - 6ay + y^2 = 0 \iff y((1+a^2)y - 6a) = 0$$

de donde $y = 0$ ó $y = \dfrac{6a}{1+a^2}$. Nos quedamos con el corte distinto del origen. Como $x = ay$ queda:

$$A = \left(\frac{6a^2}{1+a^2}, \frac{6a}{1+a^2}\right).$$

Ahora cortamos r y h:

$$\begin{cases} 0 = y - 3 \\ x = ay \end{cases}$$

Queda:

$$B = (3a, 3).$$

La paralela al eje OX por A es $y = \dfrac{6a}{1+a^2}$.

La paralela al eje OY por B es $x = 3a$.

Y la intersección de ambas:

$$x = 3a, \qquad y = \frac{6a}{1+a^2}$$

que son las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico. Para hallar la implícita despejamos el parámetro a en la primera y sustiyuimos en la segunda Queda:

$$y = \frac{2x}{1+(x/3)^2} \iff y = \frac{18x}{x^2+9} \iff yx^2 + 9y - 18x = 0.$$

15.– *En el plano afín se sean las rectas $r \equiv y-1=0$ y $s \equiv x-y=0$. Para cada punto P de s se traza una recta l perpendicular a s pasando por P. Sea Q el punto de corte de r y l.*

(i) *Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos medios de P y Q.*

Un punto $P=(a,b)$ de la recta s cumple la ecuación $x-y=0$. Por tanto $a-b=0$ y $a=b$. Podemos escribir $P=(a,a)$.

La recta perpendicular a s que pasa por P tiene por vector director el vector normal de s, es edcir, $(1,-1)$. Su ecuación vectorial es:

$$(x,y)=(a,a)+\lambda(1,-1).$$

Cortamos con la recta r, $y=1$:

$$a-\lambda=1 \iff \lambda=a-1$$

El punto de corte Q es:

$$(a,a)+(a-1)(1,-1)=(2a-1,1)$$

Finalmente el punto medio de P y Q es:

$$\frac{P+Q}{2}=\frac{(a,a)+(2a-1,1)}{2}=\left(\frac{3a-1}{2},\frac{a+1}{2}\right).$$

Las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico son:

$$x=\frac{3a-1}{2}, \quad y=\frac{a+1}{2}.$$

Para hallar las implícitas despejamos el parámetro a en una ecuación y sustituimos en la otra:

$$a=2y-1, \qquad 2x=3a-1=3(2y-1)-1=6y-4$$

En definitiva la ecuación implícita pedida es:

$$x-3y+2=0.$$

(ii) *Hallar el ángulo que forman las rectas r y s.*

El ángulo que forman las rectas es el mismo que forman sus vectores normales $\vec{n}_r=(0,1)$ y $\vec{n}_s=(1,-1)$:

$$cos(\alpha)=\frac{\vec{n}_r\cdot\vec{n}_s}{\|\vec{n}_r\|\|\vec{n}_s\|}=\frac{(0,1)\cdot(1,-1)}{\|(0,1)\|\|(1,-1)\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto:

$$\alpha=arcos\frac{-1}{\sqrt{2}}=135^o.$$

16.– En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A=(1,0,0)$ y $B=(1,2,2)$.

(i) *Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de A y B.*

Método I: Un punto $P=(x,y,z)$ equidista de A y B si:

$$d(P,A)=d(P,B) \iff \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y operando resulta:

$$x^2-2x+1+y^2+z^2=x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-4z+4$$

Simplificando obtenemos el plano de ecuación:

$$y + z - 2 = 0.$$

Método II: Los puntos que equidistan de dos dados en el espacio son aquellos que yacen en el plano mediatriz; es decir el plano que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento que los une. Tenemos:

$$M = \frac{A+B}{2} = (1,1,1).$$

El vector $\vec{AB} = (0,2,2)$ es perpendicular al plano buscado. Equivalentemente el vector $(0,1,1)$ es el vector normal de tal plano. Por tanto éste es de la forma:

$$y + z + d = 0.$$

Imponemos que pase por M:

$$1 + 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -2.$$

Así el lugar geomẃetrico pedido es:

$$y + z - 2 = 0.$$

(ii) *Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $z = 2$, de manera que el triángulo ABC sea isósceles con AB el lado desigual y tenga área $2\sqrt{3}$. ¿Es única la solución?.*

Por estar en el plano $z = 2$ el punto es de la forma $C = (a, b, 2)$. Ahora por formar un triángulo isósceles con AB, equidista de A y B y por tanto está en el lugar geométrico hallado en el apartado anterior:

$$b + 2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Es decir $C = (a, 0, 2)$. Finalmente $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$. Pero:

$$Area(ABC) = \frac{base \cdot h}{2} = \frac{\|\vec{AB}\|\|\vec{MC}\|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{(a-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)}$$

Igualando $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$ queda:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)} \quad \Rightarrow \quad 6 = (a-1)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = \pm 2.$$

Vemos que hay dos soluciones (la solución no es por tanto única):

$$a = 3 \text{ ó } a = -1.$$

Es decir:

$$C = (3, 0, 2) \text{ ó } C = (-1, 0, 2).$$

I.– *En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene el triángulo ABC de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (c,d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.*

Calculemos la ecuación de las tres alturas. Utilizaremos siempre el mismo método. Si conocemos el vector normal (p,q) de una recta su ecuación es:

$$px + qy + r = 0.$$

Para hallar r utilizamos que la recta que buscamos pasa por un punto adicional.

En nuestro caso los vectores normales (perpendiculares) a las alturas son los lados del trángulo, y el punto adicional el vértice opuesto:

- Recta perpendicular a AB y pasando por C. Vector normal $\bar{AB} = (1,0)$, como pasa por $C = (c,d)$ queda:

$$x - c = 0.$$

- Recta perpendicular a AC y pasando por B. Vector normal $\bar{AC} = (c,d)$, como pasa por $B = (1,0)$ queda:

$$cx + dy - c = 0.$$

- Recta perpendicular a BC y pasando por A. Vector normal $\bar{BC} = (c-1,d)$, como pasa por $A = (0,0)$ queda:

$$(c-1)x + dy = 0$$

Ahora podemos concluir de dos formas:

I) Si a la segunda ecuación le restamos la primera, obtenemos la tercera. Por tanto esta está en el haz de rectas formada por las dos primeras y las tres rectas se cortan en el mismo punto.

II) Directamente calculamos la intersección de las dos primeras resolviendo el sistema. Queda:

$$x = c; \quad y = (c - c^2)/d.$$

Y comprobamos que también es un punto de la tercera:

$$(c-1)c + d(c - c^2)/d = c^2 - c + c - c^2 = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

II.– *Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (2,0,1),\ D = (1,1,1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD.

Las ecuación vectorial del plano BCD es:

$$X = B + \alpha\vec{BC} + \beta\vec{BD},$$

es decir:

$$(x,y,z) = (1,0,0) + \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) = (1+\alpha, \beta, \alpha+\beta).$$

La proyección buscada A' pertence a ese plano y debe de cumplir que el vector AA' sea perpendicular al mismo; equivalente que sea perpendicular a sus vectores directores. Imponemos estas condiciones:

$$\vec{AA'} \perp \vec{BC} \quad \Rightarrow \quad (1+\alpha, \beta, \alpha+\beta)G(1,0,1)^t = 0$$

$$\vec{AA'} \perp \vec{BD} \quad \Rightarrow \quad (1+\alpha, \beta, \alpha+\beta)G(0,1,1)^t = 0$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4\alpha + 3\beta &= -2 \\ 3\alpha + 5\beta &= 0 \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema:

$$\alpha = -\frac{10}{11}, \quad \beta = \frac{6}{11}.$$

La proyección pedida es:

$$A' = (1+\alpha, \beta, \alpha+\beta) = (\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{4}{11}).$$

III.– *En el espacio E_2 dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas $r : x = 1$ y $s : y = x$. Hallar una recta que pase por $M(2,1)$ y que corta a r y a s en dos puntos distintos (respectivamente A y B), tales que M equidiste de A y B.*

Dado que M equidista de A y B y los tres puntos son colineales, M es precisamente el punto medio entre A y B. El punto A es de la forma $(1,a)$ y el B, (b,b). Por tanto:

$$(2,1) = \frac{(1,a)+(b,b)}{2} = (b-2, b-1) \quad \Rightarrow \quad a = -1; \quad b = 3$$

La recta que buscamos es la que une los puntos $M(2,1)$ y $A(1,-1)$. Resulta por tanto

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{-1-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 3 = 0$$

(Examen extraordinario, setiembre 2001)

IV.– *En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:*

- $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,1)$.

- *El vértice D se encuentra en un plano paralelo a la base ABC y que pasa por el punto $P = (0,10,9)$.*

- *El vértice D equidista de los otros tres.*

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

El volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{base \cdot altura}{3}.$$

El área de la base es la del triángulo ABC:

$$\frac{1}{2}\|\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|\| = \frac{1}{2}\|\|(0,-1,1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

La altura es la distancia del punto D a ABC; pero como el plano que contiene a D y es paralelo a ABC también pasa por $P = (0, 10, 9)$, $dis(D, ABC) = dis(P, ABC)$. El plano ABC tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \iff y - z = 0.$$

La altura queda por tanto:

$$h = \frac{|10 - 9|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El volumen pedido será:

$$V = \frac{(\sqrt{2}/2) \cdot (1/\sqrt{2})}{3} = \frac{1}{6}.$$

(ii) *Hallar las coordenadas del vértice D.*

El vértice D se encuentra en el plano paralelo a ABC (cuya ecuación hemos calculado antes $y - z = 0$) y pasando por P. Tal plano es de la forma:

$$y - z + k = 0$$

e imponiendo que pase por P queda $10 - 9 + k = 0$, de donde $k = 1$. Deducimos que el plano que contiene a D tien por ecuación:

$$y - z - 1 = 0.$$

y por tanto podemos tomar D como:

$$D = (a, b + 1, b)$$

Ahora usamos que el punto D equidista de los otros tres:

$$\begin{aligned} d(A, D) = D(B, D) &\iff \sqrt{a^2 + (b+1)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2 + b^2} \\ d(A, D) = D(C, D) &\iff \sqrt{a^2 + (b+1)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + (b-1)^2} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y simplificando queda:

$$\begin{aligned} 0 &= 2a - 1 \\ 0 &= 4b \end{aligned}$$

Obtenemos que $a = 1/2$ y $b = 0$, con lo que $D = (1/2, 1, 0)$.

(iii) *Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano ABC.*

El plano está generado por los vectores $\vec{AB} = (1, 0, 0)$ y $\vec{AC} = (0, 1, 1)$. Un vector perpendicular a ambos es el vector normal al plano ABC, $(0, 1, -1)$. Construimos una base con esos tres vectores:

$$B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}.$$

En esa base la matriz de la simetría es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos un cambio de base:

$$F_C = M_{CB'} F_{B'} M_{CB'}^{-1}.$$

donde:

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciónes de la simetría son (teniendo en cuenta que el origen es un punto fijo de la misma):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(iv) *Hallar el simétrico de P respecto de la simetría anterior.*

Simplemente usamos la fórmula hallada en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

V.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro con centro el punto $(1,2)$ y ángulo $\pi/2$. Calcular la ecuación de la recta que se obtiene al aplicar el giro a la recta $x-2y+1=0$.*

La matriz de giro de ángulo $\pi/2$ respecto de la base canónica (respecto del producto escalar usual) es:

$$G = \begin{pmatrix} cos(\pi/2) & -sin(\pi/2) \\ sin(\pi/2) & cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El giro de centro $(1,2)$ y ángulo $\pi/2$ tiene entonces por ecuaciones:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-y \\ x+1 \end{pmatrix}$$

Para girar la recta $x-2y+1=0$ tomamos dos puntos de ella, los giramos por la fórmula calculada anteriormente y hallamos la recta que los une.

Dos puntos de la recta dada son por ejemplo $(-1,0)$ y $(1,1)$.

$$f(-1,0) = (3-0, -1+1) = (3,0), \qquad f(1,1) = (2,2).$$

La recta que une $(3,0)$ y $(2,2)$ es:

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y-0}{2-0} \iff 2x+y-6=0.$$

VI.– *En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+12=0 \\ z=5 \end{cases}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (1,2,2) + \lambda(0,1,2).$$

Calcular la distancia entre las rectas r y s.

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$x = a, \quad y = -12 - a, \quad z = 5$$

y su vector director $(1, -1, 0)$; por tanto un punto P de tal recta es de la forma $P = (a, -12 - a, 5)$.

Un punto Q de la recta s es de la forma $Q = (1, 2 + b, 2 + 2b)$.

La distancia $d(P, Q)$ coincide con la distancia buscada $d(r, s)$ cuando el vector PQ es perpendicular a las dos rectas dadas:

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3).$$

Imponemos las condiciones de perpendicularidad. Hay que recordar que para hacer los productos escalares hay que usar la matiz de Gram dada:

$$PQ \perp (1, -1, 0) \iff PQ \cdot (1, -1, 0) = 0 \iff (1-a, 14+a+b, 2b-3)G_C(1, 1, 0)^t = 0 \iff -7-2a-5b = 0.$$

y

$$PQ \perp (0, 1, 2) \iff PQ \cdot (0, 1, 2) = 0 \iff (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3)G_C(0, 1, 2)^t = 0 \iff 34 + 5a + 29b = 0.$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$a = b = -1$$

Por tanto

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3) = (1 + 1, 14 - 1 - 1, 2(-1) - 3) = (2, 12, -5)$$

La distancia pedida es la norma del vector $\vec{P}Q$; recordemos de nuevo usar la matriz de Gram para calcularla:

$$\|PQ\| = \sqrt{(2, 12, -5)G_C(2, 12, -5)^t} = \sqrt{33}.$$

VII.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano Π corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1, 2, 2)$ forman con el plano Π un ángulo de $60°$.*

(Segundo Parcial, junio 2003)

El plano que corta a los ejes en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \iff x + y + z - 1 = 0$$

Dado un punto (x, y, z) cualquiera, la recta que lo une a P forma un ángulo de 60 grados con el plano precisamente si el ángulo que forma con el vector normal al mismo es de $90 - 60 = 30$ grados. El vector normal al plano es $(1, 1, 1)$. Por tanto planteamos la siguiente ecuación:

$$cos(30) = \frac{(1, 1, 1)(x - 1, y - 2, z - 2)}{\|(1, 1, 1)\|\|(x - 1, y - 2, z - 2)\|}$$

Elevando al cuadrado y operando queda la ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8xy - 8xz - 8yz + 22x + 4y + 4z - 19 = 0$$

VIII.– *En el espacio afín sean los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,1,1)$.*

a) *Calcular las coordenadas de un tercer punto C en el plano de ecuación $x+z=2$ de manera que el triángulo ABC sea equilátero. ¿Es única la solución?.*

Sea $C=(a,b,c)$. Por estar en el plano $x+z=2$ se cumple $a+c=2$. Además para que el triángulo sea equilátero tiene que cumplirse que:

$$d(A,B)=d(A,C) \iff \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(0-c)^2} \iff$$
$$\iff 2=(1-a)^2+(1-b)^2+c^2$$
$$d(A,B)=d(B,C) \iff \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(0-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2} \iff$$
$$\iff 2=a^2+(1-b)^2+(1-c)^2$$

Restando las dos ecuaciones y simplificando queda:

$$0=1-2a-1+2c \iff a=c$$

Como además $a+c=2$ obtenemos $a=c=1$. Sustituyendo ahora en la primera ecuación:

$$2=(1-1)^2+(1-b)^2+1^2 \iff (1-b)^2=1 \iff b=0 \text{ ó } b=2.$$

Hay dos soluciones (la solución no es única):

$$C=(1,0,1) \text{ ó } C=(1,2,1).$$

b) *Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.*

Si llamamos O al origen el volumen pedido es:

$$V=\frac{1}{6}|det(OA,OB,OC)|$$

Cuando $C=(1,0,1)$ queda:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{3}.$$

Cuando $C=(1,2,1)$:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}\right|=0.$$

(este volumen 0 se explica por que en este caso el origen está en el mismo plano que contiene al triángulo y por tanto sería una pirámide "degenerada" en el sentido de que el vértice superior está contendio en el mismo plano que la base.)

IX.– *En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2+2y^2=4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x=y$.*

La ecuación de C es:

$$x^2+2y^2=4.$$

La ecuación de una recta paralela a $x=y$ es:

$$x=y+c.$$

Intersecamos ambas:

$$(y+c)^2+2y^2=4 \quad\Rightarrow\quad 3y^2+2cy+c^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{c}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}.$$

Obtenemos dos soluciones:

$$y_1 = -\frac{c}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}, \quad x_1 = y_1 + c.$$

$$y_2 = -\frac{c}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}, \quad x_2 = y_2 + c.$$

Es decir, las cuerdas cortan en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). El punto medio es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (2c/3, -c/3).$$

Vemos que el lugar geométrico es la recta de ecuación paramétrica:

$$(x, y) = (2c/3, -c/3)$$

o de ecuación implícita $x = -2y$.

Observación. En realidad, de manera más rigurosa, el lugar geométrico pedido no es toda la recta, si no tan solo el segmento que se obtiene cuando el parámetro c varía en el intervalo $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$. En otro caso los valores de y_1 e y_2 no son reales. Geométricamente esto significa que las cuerdas no cortan a la elipse.

(Examen extraordinario, septiembre 2006)

X.– *En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea P el punto de coordenadas $(0,1)$. Para cada recta r pasando por el punto P, llamamos A y B a los puntos de intersección de r con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de A y B. ¿Qué tipo de curva se obtiene?.*

Método I: Consideramos el haz de rectas de puntos pasando por $(0,1)$. Está generado por dos rectas que pasan por él, por ejemplo, $x = 0$ e $y - 1 = 0$. El haz es de la forma:

$$\lambda x + (y - 1) = 0.$$

(de esta forma exlcuímos la recta $x = 0$: pero eso no es problema, dicha recta es la única que no corta a la parábola dada en dos puntos por lo que no interviene en la construcción).

Intersecamos la recta con la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + (y-1) = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda x + x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}}{2}, \quad y_1 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 + \lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}$$

y

$$x_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2+4}}{2}, \quad y_2 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 - \lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (\frac{-\lambda}{2}, 1 + \frac{\lambda^2}{2})$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-\lambda}{2}, \quad y = 1 + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Para hallar la ecuación implícita del lugar geométrico despejamos el parámetro en la primera ecuación y sustituimos en la segunda. Queda:

$$y = 1 + 2x^2 \iff 2x^2 - y + 1 = 0.$$

Se trata de una cónica de matriz asociada A y de términos cuadráticos T:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $det(A) \neq 0$ y $det(T) = 0$ se trata de una parábola.

Método II: Una recta tiene por ecuación:

$$ax + by + c = 0$$

Imponemos que pase por el punto $(0, 1)$:

$$b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b$$

La ecuación queda:

$$ax + by - b = 0.$$

Intersecamos con la parábola dada:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by - b = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad ax + bx^2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_1 = 1 - \frac{ax_1}{b} = 1 - \frac{-a^2 + a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

y

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_2 = 1 - \frac{ax_2}{b} = 1 - \frac{-a^2 - a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (\frac{-a}{2b}, 1 + \frac{a^2}{2b^2})$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-a}{2b}, \quad y = 1 + \frac{a^2}{2b^2}$$

Despejando a en la primera ecuación y sustiyuendo en la segunda queda:

$$y = 1 + \frac{4b^2x^2}{2b^2} = 1 + 2x^2.$$

Ahora conluimos como en el método anterior.

XI.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta $3x - 4y = 0$ en la recta $y + 3 = 0$ y esté centrado en un punto de la recta $y = 0$.*

El centro de giro debe de equidistar de ambas rectas. Por tanto buscamos un punto $P = (a, 0)$ sobre la recta $y = 0$ que equidiste de las otras dos:

$$d(P, 3x - 4y = 0) = d(P, y + 3 = 0) \iff \frac{|3a - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \iff |a| = 5 \iff a = \pm 5.$$

Hay pos posibilidades. Tomamos una de ellas como centro $P = (5, 0)$.

Ahora para saber el ángulo de giro hallamos la proyección ortogonal A de P sobre la recta $3x - 4y = 0$ y la proyección ortogonal B de P sobre la recta $y + 3 = 0$.

El punto A cumple la ecuación de $3x - 4y = 0$ y así es de la forma $A = (4k, 3k)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal:

$$\frac{4k - 5}{3} = \frac{3k - 0}{-4} \iff k = 4/5.$$

Obtenemos $A = (16/5, 12/5)$ y $\vec{P}A = A - P = (-9/5, 12/5)$.

El punto B cumple la ecuación de $y + 3 = 0$ y así es de la forma $B = (m, -3)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal $(1, 0)$:

$$m - 5 = 0 \iff m = 5.$$

Obtenemos $B = (5, -3)$ y $\vec{P}B = A - P = (0, -3)$.

El ángulo de giro α es el que forman los vectore $\vec{P}A$ y $\vec{P}B$:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{P}A \cdot \vec{P}B}{\|\vec{P}A\| \|\vec{P}B\|} = \frac{-36/5}{9} = \frac{-4}{5}.$$

El sentido de giro coincide con la orientación de la base $\{\vec{P}A, \vec{P}B\}$ es decir con el signo del determinante de:

$$det \begin{pmatrix} -9/5 & 0 \\ 12/5 & -3 \end{pmatrix} = 27/5 > 0.$$

Por tanto:

$$sin(\alpha) = +\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = \frac{3}{5}.$$

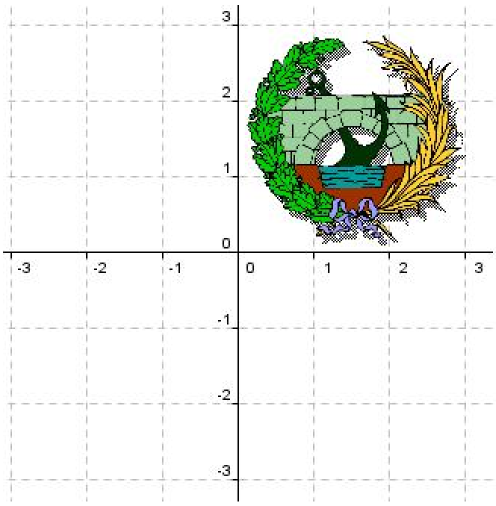
En definitiva las ecuaciones del giro quedan:

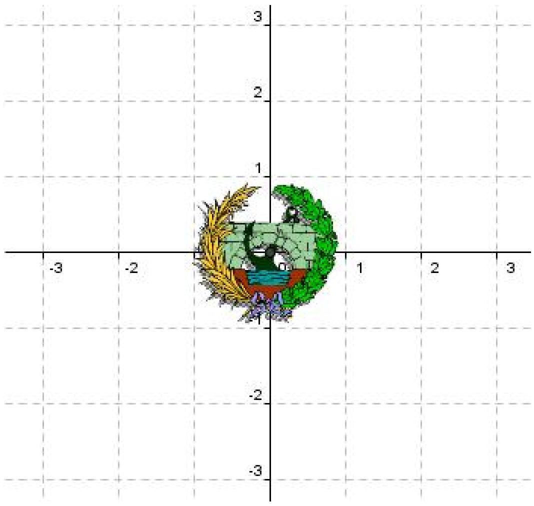
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el ángulo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y \end{pmatrix}.$$

XII.– *Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura el la otra.*





Dividiremos la transformación en varios pasos.

Observamos que el tamaño de la figura final es 2/3 el de la inicial. Hacemos una homotecia centrada en el origen y de razón 2/3.

$$f_1(x, y) = \frac{2}{3}(x, y).$$

Vemos que la figura que queremos obtener es simétrica de la que tenemos ahora respecto de una recta paralela al eje y. Hacemos la simetría respecto de ese eje:

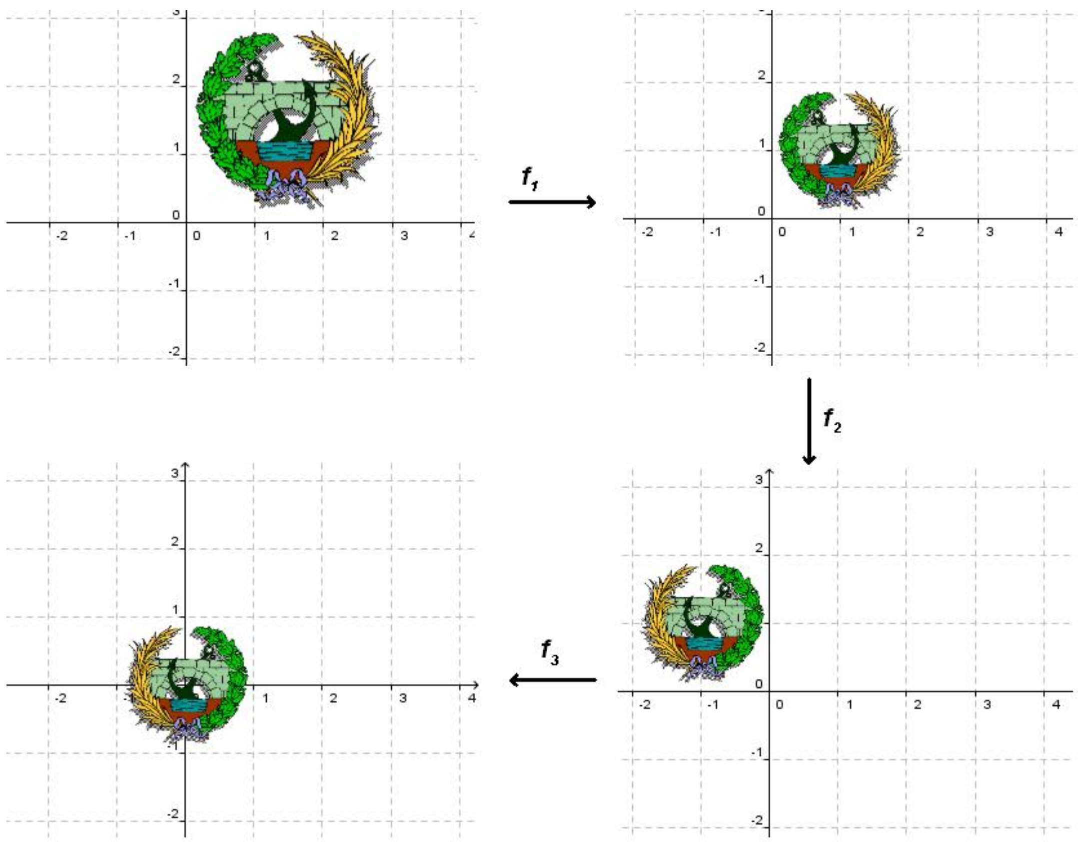
$$f_2(x, y) = (-x, y).$$

Finalmente tenemos que trasladar la figura. El vértice $(-2, 2)$ ha de ser el $(-1, 1)$. Por tanto trasladamos según el vector $(1, -1)$:

$$f_3(x, y) = (x, y) + (1, -1).$$

La transformación pedida es la composición de las tres:

$$f(x, y) = f_3(f_2(f_1(x, y))) = f_3(f_2(2x/3, 2y/3)) = f_3(-2x/3, 2y/3) = (1, -1) + \frac{2}{3}(-x, y).$$



XIII.– *Supongamos que escogemos* 2011 *puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?*

Una simetría respecto a $P = (a, b, c)$ tiene por ecuación:

$$f(X) = f(x, y, z) = (a, b, c) - (x - a, y - b, z - c) = (2a, 2b, 2c) - (x, y, z) = 2P - X.$$

Por tanto la matriz asociada a la parte lineal de la trasnformación afín es $-Id$. Entonces la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín que se obtiene componiendo 2011 simetrías respecto a un punto es $(-Id)^{2011} = -Id$. Deducimos que la composición es de nuevo una simetría respecto a un punto.

Observación: Si los puntos que escogemos son $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2011}$ al ir componiendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
&f_1(X) = 2P_1 - X\\
&f_2(f_1(X)) = 2P_2 - (2P_1 - X) = 2(P_2 - P_1) + X\\
&f_3(f_2(f_1(X)) = 2P_3 - 2(P_2 - P_1) - X = 2(P_3 - P_2 + P_1) - X
\end{aligned}$$

Nos fijamos entonces que la simetría que obtenemos al componer todas las transformaciones es respecto al punto de coordenadas:

$$P_{2011} - P_{2010} + P_{2009} - \dots + P_3 - P_2 + P_1.$$

XIV.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos* $A = (-1, 4)$ *y* $B = (1, 5)$ *respectivamente en* $A' = (3, 4)$ *y* $B' = (5, 3)$*. Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.*

Tenemos en cuenta que el centro de un giro pertenece a la mediatriz del segmento que une un punto con su imagen. Por tanto calcularemos la mediatriz de AA' y de BB'; la intersección de ambas será el centro de giro.

El punto medio de AA' es:
$$M_1 = \frac{A + A'}{2} = (1, 4).$$
La mediatriz es la recta que pasa por M_1 y tiene como vector normal el $AA' = (4, 0)$:
$$4x + d = 0.$$
Imponiendo que pase por M_1:
$$4 + d = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d = -4.$$
Por tanto la mediatriz de AA' es la recta $x - 1 = 0$.

El punto medio de BB':
$$M_2 = \frac{B + B'}{2} = (3, 4).$$
La mediatriz es la recta que pasa por M_2 y tiene como vector normal el $BB' = (4, -2)$:
$$4x - 2y + c = 0.$$
Imponiendo que pase por M_2:
$$4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + c = 0 \qquad \Rightarrow \quad c = -4.$$
Por tanto la mediatriz de BB' es la recta $2x - y - 2 = 0$.

El centro es la intersección de ambas:
$$\left.\begin{array}{r} x - 1 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C = (x, y) = (1, 0).$$

Ahora el giro debe de llevar el vector $CA = (-2, 4)$ en el vector $CA' = (2, 4)$, por tanto el ángulo de giro α cumplirá:
$$cos(\alpha) = \frac{(-2, 4) \cdot (2, 4)}{\|(-2, 4)\| \|(2, 4)\|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$
El sentido de giro es la orientación de la base $B = \{(-2, 4), (2, 4)\}$:
$$signo(det(M_{CB})) = signo\left(det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\right) = signo(-16) < 0.$$
Se trata por tanto de un giro de centro $(1, 0)$ y ángulo de giro:
$$\alpha = -arcos(3/5).$$
El seno del ángulo es por tanto:
$$sin(\alpha) = -\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = -4/5.$$
Las ecuaciones de giro quedan:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix}.$$

XV.– *En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s.

En primer lugar hallamos la matriz de Gram respecto de la referencia dada. Sabemos que con respecto a la base:

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$$

la matriz de Gram es la identidad. Tenemos:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Entonces:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = M_{BC}^t M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de la recta r son de la forma:

$$(0, 0, a)$$

Los puntos de la recta s son de la forma:

$$(b, 1, -b)$$

El vector que une ambos es el vector director de las rectas pedidas:

$$(b, 1, -b - a)$$

y ha de ser perpendicular a s, luego:

$$(1, 0, -1)G_C(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad (1, 0, -2)(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3b/2.$$

La ecuación paramétrica de los puntos que unen:

$$(0, 0, -3b/2), (b, 1, -b)$$

es:

$$\begin{aligned} x &= \lambda b \\ y &= \lambda \\ z &= -3b/2 + b\lambda/2 \end{aligned}$$

Eliminando parámetros queda:

$$\lambda = y; \quad b = x/y;$$

y sustituyendo en la última ecuación:

$$z = -3x/(2y) + x/2 \quad \Rightarrow \quad 2yz + 3x - xy = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)