

1.— Se considera el espacio vectorial euclídeo  $\mathbb{R}^3$  referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:

(a) la simetría ortogonal con respecto al subespacio  $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ ;

Calculamos una base del subespacio ortogonal a  $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ :

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}^\perp = \mathcal{L}\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$$

La matriz de la simetría en la base  $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$  es:

$$S_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(**Observación:** Para las *simetrías* no es necesario que la base que se utiliza sea *ortonormal*, basta tomar una base cualquiera formada por bases arbitrarias de la dirección con respecto a la cual se hace la simetría y su subespacio ortogonal. Sin embargo para los *giros* si hay que escoger una base *ortonormal*.)

Para calcular la matriz en la base inicial hacemos el cambio de base:

$$\begin{aligned} S_{CC} &= M_{CB} S_{BB} M_{CB}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) la simetría ortogonal con respecto al subespacio  $\mathcal{L}\{(1, 1, 1), (2, 0, 1)\}$ ;

De nuevo calculamos el ortogonal:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (2, 0, 1)\}^\perp = \mathcal{L}\{(1, 1, -2)\}$$

Por tanto en la base  $B = \{(1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, 1, -2)\}$  la matriz es:

$$S_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Haciendo el cambio de base obtenemos:

$$S_{CC} = M_{CB} S_{BB} M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

(c) la rotación de  $60^\circ$  alrededor del semieje que contiene al  $(1, 1, 1)$  (considerando en  $\mathbb{R}^3$  la orientación correspondiente a la base de partida).

Tomamos una base ORTONORMAL del ortogonal a  $(1, 1, 1)$ :

$$\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}^\perp = \mathcal{L}\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$$

Consideramos la base  $B = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$  y comprobamos que tiene la orientación adecuada viendo que el determinante formado por estos vectores es positivo. Si no fuese así cambiamos de orden los dos últimos vectores o de signo uno de ellos. Ahora la matriz de la rotación en esta base es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(60) & -\sin(60) \\ 0 & \sin(60) & \cos(60) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Para calcularla en la base canónica hacemos el cambio. Hay que tener en cuenta que por ser las dos bases ortonormales, la inversa de la matriz de paso coincide con su traspuesta:

$$\begin{aligned} T_{CC} &= M_{CB} T_{BB} M_{CB}^{-1} = M_{CB} T_{BB} M_{CB}^t = \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^t = \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.— En  $\mathbb{R}^3$  se considera el producto escalar usual y la orientación dada por la base canónica. Calcular las ecuaciones del giro de 45 grados y semieje generado por el vector  $(1, 1, 1)$ .

Buscamos una base ortonormal bien orientada en la cual el primer vector tenga la misma dirección y sentido que el semieje de giro:

$$\bar{u}_1 = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Los vectores perpendiculares a  $\bar{u}_1$  cumplen:

$$(x, y, z)(1, 1, 1) = 0 \iff x + y + z = 0.$$

Tomamos el vector  $(1, -1, 0)$  verificando esta ecuación. Buscamos un tercero perpendicular a ambos:

$$\begin{aligned} (x, y, z)(1, 1, 1) = 0 &\iff x + y + z = 0 \\ (1, -1, 0)(x, y, z) = 0 &\iff x - y = 0 \end{aligned}$$

Escogemos el vector  $(1, 1, -2)$ . Normalizados quedan:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad \bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Comprobamos que está bien orientada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

En la base  $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$  la matriz del giro es:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45) & \sin(45) \\ 0 & -\sin(45) & \cos(45) \end{pmatrix}.$$

Ahora basta cambiarla de base. Tenemos en cuenta que por ser la base canónica y la base  $B$  ortonormales, la matriz de cambio de base es ortogonal, es decir  $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$ . Queda entonces:

$$T_{CC} = M_{CB} T_{BB} M_{BC} = M_{CB} T_{BB} M_{CB}^t,$$

con

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$M_{CC} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

3.— En  $\mathbb{R}^3$  se considera el producto escalar cuya matriz de Gram respecto a la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un giro de  $36.87^\circ$  de semieje generado por el vector  $(1, 0, 0)$  y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

**Observación:**  $\sin(36.87^\circ) = \frac{3}{5}$ .

Construimos una base ortogonal teniendo como primer vector el generador del semieje. Los vectores perpendiculares a  $(1, 0, 0)$  cumplen:

$$(1, 0, 0)G(x, y, z)^t = 0 \iff x + y + z = 0. \quad (I)$$

Escogemos un vector satisfaciendo esta ecuación:  $(1, -1, 0)$ . Los vectores perpendiculares a éste han de verificar:

$$(1, -1, 0)G(x, y, z)^t = 0 \iff -y - z = 0. \quad (II)$$

Seleccionamos un tercer vector verificando simultáneamente (I) y (II). Por ejemplo  $(0, 1, -1)$ .

Tenemos la base ortogonal:

$$B = \{(1, 0, 0), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$$

Comprobamos si tiene orientación positiva. Equivalentemente si la matriz de cambio de base a la canónica tiene determinante positivo:

$$\det(M_{CB}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

La normalizamos dividiendo cada vector por su norma:

$$\begin{aligned} \|(1, 0, 0)\| &= \sqrt{(1, 0, 0)G(1, 0, 0)^t} = 1 \\ \|(1, -1, 0)\| &= \sqrt{(1, -1, 0)G(1, -1, 0)^t} = 1 \\ \|(0, 1, -1)\| &= \sqrt{(0, 1, -1)G(0, 1, -1)^t} = 1 \end{aligned}$$

Resultan ser los tres unitarios y así tenemos la base ortonormal:

$$B = \{(1, 0, 0), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$$

Respecto de esta base, siendo  $A = 36.87^\circ$ , la matriz de giro es:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(A) & -\sin(A) \\ 0 & \sin(A) & \cos(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

(donde  $\cos(A) = \sqrt{1 - \sin(A)^2} = 4/5$ ). Finalmente la cambiamos a la base canónica:

$$F_{CC} = M_{CB}F_{BB}M_{BC} = M_{CB}F_{BB}M_{CB}^{-1}$$

Siendo:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operando nos queda:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 1/5 & -6/5 \\ 0 & 3/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

4.— En  $\mathbb{R}^3$  consideramos el producto escalar usual y la orientación de la base canónica. Se define la transformación ortogonal que en esta base tiene asociada la matriz

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Definir su naturaleza y descomponerla en giros y/o simetrías.

Utilizamos que el determinante y traza de la matriz asociada a la transformación ortogonal se conserva al cambiarla de base. El determinante de  $A$  es 1 por lo que se trata de una transformación directa. La traza es 1, por lo que necesariamente se trata de un giro de ángulo  $\alpha$ , donde:

$$1 + 2\cos(\alpha) = 1$$

Por tanto  $\cos(\alpha) = 0$  y  $\alpha = \pm\pi/2$ . El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}.$$

Para saber el signo del ángulo, consideramos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), A(1, 0, 0)\} = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (1/2, \sqrt{2}/2, 1/2)\}.$$

Vemos que

$$\det(M_{BC}) > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de  $\pi/2$  respecto al semieje generado por el vector  $(1, 0, 1)$ .

**(Examen final, junio 2007)**

5.— Sea  $\mathbb{R}^3$  el espacio euclideo con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica. Se considera el endomorfismo:

$$t: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \right).$$

(i) Probar que  $t$  es una transformación ortogonal.

Para que sea ortogonal su matriz asociada respecto a una base ortonormal (por ejemplo la canónica) ha de cumplir  $T_C T_C^t = Id$ . Pero:

$$T_C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Y por tanto efectivamente  $T_C T_C^t = Id$ .

(ii) Describir geoméricamente la transformación  $t$ .

Primero calculamos el determinante de la matriz asociada  $T_C$ . Si es 1 se trata de un giro; si es  $-1$  se trata de un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Tenemos  $\det(T_C) = -1$ . Por tanto es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Para hallar el ángulo de giro  $\alpha$  tenemos en cuenta que:

$$\text{traza}(T_C) = -1 + 2\cos(\alpha) \iff 1 = -1 + 2\cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = 1 \iff \alpha = 0.$$

El ángulo es nulo y entonces en realidad es simplemente una simetría respecto a un plano. El plano de simetría es el espacio característico de autovectores asociados al 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + y + \sqrt{2}z = 0, x - y - \sqrt{2}z = 0, \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 2z = 0\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - \sqrt{2}z = 0\}. \end{aligned}$$

En definitiva es una simetría respecto al plano  $x - y - \sqrt{2}z = 0$ .

(iii) Dada la recta  $r$  de ecuaciones  $x + y = 0$ ,  $z = 0$ , hallar las ecuaciones de la recta que se obtiene al aplicarle el endomorfismo  $t$  a  $r$ .

Basta girar el generador de la recta. Para hallar tal generador pasamos de implícitas a paramétricas:

$$x + y = 0, \quad z = 0 \iff x = \lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = 0.$$

El vector director es  $(1, -1, 0)$ . Lo multiplicamos por la matriz de la transformación para hallar su imagen:

$$T_C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La recta imagen está generada por el vector  $(0, 0, \sqrt{2})$  o equivalentemente por  $(0, 0, 1)$ . Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \lambda;$$

y las implícitas:

$$x = 0, \quad y = 0.$$


---

6.— Sea el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada  $a, b \in \mathbb{R}$ , se considera un endomorfismo  $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para las cuales  $t$  es una transformación ortogonal.

La condición para que un endomorfismo de un espacio euclideo sea una transformación ortogonal es que su matriz asociada respecto a una base ortonormal sea ortogonal (es decir, su inversa coincida con su traspuesta). Por tanto ha de cumplirse:

$$TT^t = Id \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}^t = Id \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3a+4b}{5} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & \frac{3a+4b}{5} & a \end{pmatrix} = Id$$

De donde:

$$3a + 4b = 0, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = \frac{4}{5}, b = \frac{-3}{5} \quad \text{ó} \quad a = \frac{-4}{5}, b = \frac{3}{5}$$

(ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

Estudiaremos los dos casos obtenidos en el apartado anterior. Para clasificar necesitaremos conocer la traza y el determinante de la matriz asociada. Se tiene:

$$\det(T) = \frac{4a - 3b}{5}, \quad \text{traza}(T) = b.$$

**CASO I:**  $a = \frac{4}{5}, \quad b = \frac{-3}{5}, \quad \det(T) = 1, \quad \text{traza}(T) = \frac{-3}{5}.$

Como  $\det(T) = 1$  se trata de un giro. El ángulo de giro  $\alpha$  cumple:

$$1 + 2\cos(\alpha) = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos(\alpha) = -\frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \pm \arccos(-4/5).$$

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)(x, y, z)^t = 0 \iff -x + y = 0, \quad 4x - 8z = 0$$

Tomamos:

$$S_1 = \{(2, 2, 1)\}$$

Finalmente determinamos el signo del ángulo de giro. Para ello tomamos una base formada por el semieje de giro, un vector independiente de éste y su imagen. La orientación de tal base es el signo del ángulo de giro:

$$B = \{(2, 2, 1), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(2, 2, 1), (1, 0, 0), (0, 3/5, 4/5)\}, \quad \det(M_{BC}) = -1 < 0$$

Por tanto se trata de un giro de ángulo  $-\arccos(-4/5)$  y semieje generado por  $(2, 2, 1)$ .

**CASO II:**  $a = \frac{-4}{5}, \quad b = \frac{3}{5}, \quad \det(T) = -1, \quad \text{traza}(T) = \frac{3}{5}.$

Como  $\det(T) = 1$  se trata de un giro compuesto con una simetría. El ángulo de giro  $\alpha$  cumple:

$$-1 + 2\cos(\alpha) = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \pm \arccos(4/5).$$

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al autovalor  $-1$ :

$$(T + Id)(x, y, z)^t = 0 \iff x + y = 0, \quad -4x + 8z = 0$$

Tomamos:

$$S_1 = \{(2, -2, 1)\}$$

Determinamos el signo del ángulo de giro. Para ello tomamos una base formada por el semieje de giro, un vector independiente de éste y su imagen. La orientación de tal base es el signo del ángulo de giro:

$$B = \{(2, -2, 1), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(2, -2, 1), (1, 0, 0), (0, 3/5, -4/5)\}, \quad \det(M_{BC}) = -1 < 0$$

Finalmente el plano de simetría es perpendicular al semieje:

$$S_{-1}^\perp = \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x, y, z) \cdot (2, -2, 1) = 0\} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 2x - 2y + z = 0\}.$$

Por tanto se trata de un giro de ángulo  $-\arccos(4/5)$ , semieje generado por  $(2, -2, 1)$  compuesto con una simetría respecto al plano de ecuación implícita  $2x - 2y + z = 0$ .

**7.**— En  $R^3$  se considera una aplicación bilineal  $f : R^3 \times R^3 \rightarrow R$  cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea además un endomorfismo  $t : R^3 \rightarrow R^3$  con matriz asociada respecto de la base canónica:

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que  $f$  es un producto escalar.

Para que sea un producto escalar tiene que ser una aplicación bilineal, simétrica y definida positiva:

- Ya nos dicen que es bilineal.
- Es simétrica porque su matriz asociada es simétrica.
- Para ver que es definida positiva podemos comprobar, por ejemplo, el criterio de Sylvester:

$$\det(5) = 5 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 19 > 0$$

También podríamos diagonalizarla por congruencia y ver que la signatura es  $(3, 0)$ :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 9/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Es  $t$  es una transformación ortogonal con el producto escalar usual? ¿Y con el producto escalar definido por  $f$ ?

Para que sea transformación ortogonal tiene que cumplirse que:

$$T^t G_C T = G_C$$

siendo  $G_C$  la correspondiente matriz del producto escalar.

Si se trata del producto escalar usual,  $G_C = Id$  y entonces:

$$T^t G_C T = T^t T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq Id.$$

Por tanto no es transformación ortogonal respecto del producto escalar usual.

Si se trata del producto escalar definido por  $f$ ,  $G_C = F$  y entonces:

$$T^t G_C T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = G_C.$$

Luego SI es transformación ortogonal respecto del producto escalar definido por  $f$ .

- c) *En el caso de que si sea una transformación ortogonal, describir geoméricamente  $T$  considerando como orientación positiva la dada por la base canónica (indicar si procede el ángulo y semieje de giro y/o el subespacio de simetría).*

Tenemos:

$$\det(T) = -1, \quad \text{traza}(T) = -1.$$

Por tanto se trata de la composición de un giro y una simetría respecto al plano  $S_{-1}^{\perp}$ . Calculemos el autovector asociado a  $-1$ :

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

De donde:

$$S_{-1} = \mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$$

Hallamos  $S_{-1}^{\perp}$ . Recordemos que estamos usando el producto escalar definido por  $f$ :

$$(x, y, z)F(1, 0, 1)^t = 0 \iff 2x - z = 0.$$

Luego la simetría es respecto al plano de ecuación implícita  $2x - z = 0$ .

Para conocer el ángulo  $\alpha$  de giro tenemos en cuenta que:

$$-1 = \text{traza}(T) = -1 + 2\cos(\alpha).$$

De donde  $\cos(\alpha) = 0$ . Resta saber que signo debemos de dar a  $\alpha$ . Consideramos la base:

$$\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), t(0, 1, 0)\} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$$

Su orientación con respecto a la base canónica es:

$$\text{signo}(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = \text{signo}(1) < 0$$

Vemos que tiene orientación negativa.

En definitiva deducimos que la transformación  $t$  es la composición de un giro de 90 grados, de semieje generado por  $(1, 0, 1)$  y una simetría respecto al plano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - z = 0\}$ .

8.— Consideramos el espacio vectorial euclideo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual. Calcular la matriz asociada  $T_C$  (respecto de la base canónica) de una transformación ortogonal  $t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumple:

$$\det(T_C) = -1, \quad \text{traza}(T_C) = 1/5, \quad t(0, 1, 0) = (0, -1, 0).$$

¿Es única la solución?

Como la matriz asociada a la transformación ortogonal tiene determinante negativo, entonces es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al semieje de giro. En cierta base que en principio desconocemos, la matriz de la transformación es de la forma:

$$F_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(A) & -\sin(A) \\ 0 & \sin(A) & \cos(A) \end{pmatrix} \quad (*)$$

Y como la traza se conserva por cambios de base:

$$-1 + 2\cos(A) = 1/5 \iff \cos(A) = 3/5.$$

Además el semieje de giro está generado por un autovector asociado al  $-1$  (único salvo múltiplo por ser un giro distinto de 180 grados). Tal vector nos es dado en el enunciado  $(0, 1, 0)$ .

En definitiva se trata de un giro de un ángulo  $A$  con  $\cos(A) = 3/5$  y semieje generado por  $(0, 1, 0)$  compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular. Con los datos dados no podemos saber la orientación del giro, por lo que hay dos posibles transformaciones en las condiciones dadas, con:

$$\sin(A) = +\sqrt{1 - \cos(A)^2} = +4/5 \text{ ó } \sin(A) = -\sqrt{1 - \cos(A)^2} = -4/5.$$

Para hallar la matriz asociada a la transformación respecto de la base canónica, hallamos la base  $B$  y cambiamos de base la matriz  $(*)$ .  $B$  es una base ortonormal cuyo primer vector es el semieje de giro normalizado:

$$B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

En definitiva:

$$F_C = M_{CB}F_B M_{BC} = M_{BC}^{-1}F_B M_{BC}.$$

Donde:

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & \pm 4/5 \\ 0 & \mp 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

y  $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$  por se una matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales.

Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & \mp 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ \pm 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

9.— En el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual consideramos los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \pi_1 & : x + y - z = 0 \\ \pi_2 & : 2x - y + z = 0 \end{aligned}$$

Hallar las ecuaciones de un giro que lleve el plano  $\pi_1$  en el plano  $\pi_2$ .

El eje de giro corresponde a la recta intersección de ambos planos:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Un vector director de la misma es el  $(0, 1, 1)$ .

El giro ha de llevar el vector normal de un plano sobre el otro, es decir, el  $(1, 1, -1)$  sobre la dirección dada por  $(2, -1, 1)$ . Veamos el ángulo  $\alpha$  que forman:

$$\cos(\alpha) = \frac{(1, 1, -1) \cdot (2, -1, 1)}{\|(1, 1, -1)\| \|(2, -1, 1)\|} = 0.$$

Son perpendiculares. Por tanto escogeremos un giro de semieje  $(0, 1, 1)$ , de 90 grados y de manera que la orientación positiva venga dada por la base:

$$B = \{(0, 1, 1), (1, 1, -1), (2, -1, 1)\}.$$

Construyamos dicho giro. Obtenemos una base ortogonal cuyo primer vector es el semieje de giro:

$$B' = \{(0, 1, 1), (0, 1, -1), (1, 0, 0)\}$$

Comprobamos que  $B$  y  $B'$  tienen la misma orientación. Para ello es suficiente que el determinante de la matriz de cambio de base con respecto a la canónica tenga el mismo signo:

$$\det(M_{CB}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -6 < 0, \quad \det(M_{CB'}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

Ahora normalizamos la base  $B'$ :

$$B'' = \left\{ \frac{(0, 1, 1)}{\|(0, 1, 1)\|}, \frac{(0, 1, -1)}{\|(0, 1, -1)\|}, \frac{(1, 0, 0)}{\|(1, 0, 0)\|} \right\} = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1, 0, 0) \right\}.$$

La matriz de giro en la base  $B''$  es:

$$F_{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90) & -\sin(90) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La pasamos a la base canónica:

$$F_C = M_{CB''} F_{B''} M_{BC''} = M_{CB''} F_{B''} M_{CB''}^{-1} = M_{CB''} F_{B''} M_{CB''}^t$$

donde usamos que las bases  $B''$  y  $C$  son ambas ortonormales y por tanto la inversa de la matriz de cambio de base coincide con su traspuesta. Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de giro son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = F_C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$


---

**10.**— En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios  $U$  generado por los vectores  $\bar{u}_1 = (1, 2, -2)$  y  $\bar{u}_2 = (1, 1, 0)$  y  $V$  generado por el vector  $\bar{v} = (1, 0, -1)$ . Hallar el subespacio vectorial simétrico del  $V$  respecto de  $U$ .

Para calcular el simétrico del subespacio  $V$  basta calcular el simétrico del vector que lo genera.

**Método I:** Calcularemos la transformación correspondiente a la simetría respecto al espacio  $U$ . Para ello necesitamos una base de  $U$  (no necesariamente ortonormal) y completarla hasta una base de  $\mathbb{R}^3$  con vectores ortogonales:

$$\begin{aligned}(x, y, z) \cdot (1, 2, -2) = 0 &\iff x + 2y - 2z = 0 \\(x, y, z) \cdot (1, 1, 0) = 0 &\iff x + y = 0\end{aligned}$$

Por tanto un vector  $\bar{u}_3$  ortogonal a  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$  es:

$$\bar{u}_3 = (2, -2, -1)$$

Ahora en la base  $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$  la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación en la base canónica, hacemos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora el simétrico del vector que genera  $V$  es:

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir el simétrico de  $V$  es el subespacio generado por el vector  $(-1, 4, -1)$ .

**Método II:** Calculamos primero la proyección ortogonal de  $\bar{v}$  sobre  $U$ . Será un vector  $\bar{w} \in U$  verificando que  $\bar{w} - \bar{v}$  es ortogonal a  $U$ . Sea  $\bar{w} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$ . Basta imponer que  $\bar{w} - \bar{v}$  sea ortogonal a los vectores que generan  $U$ :

$$\left. \begin{aligned} a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 &= \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \\ a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 &= \bar{v} \cdot \bar{u}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 3 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 0 \end{cases}$$

Por tanto  $w = (1/3, 2/3, -2/3)$ . Ahora el simétrico de  $\bar{v}$  se construye sumando al vector  $\bar{w}$  el vector  $\bar{w} - \bar{v}$ . Queda:

$$2\bar{w} - \bar{v} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) - (1, 0, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

y alcanzamos de nuevo el mismo resultado visto en el primer método.

**(Examen final, setiembre 2003)**

---

11.— Sea el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada  $a, b \in \mathbb{R}$ , se considera un endomorfismo  $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para las cuales  $t$  es una transformación ortogonal.

Para que una matriz  $T$  asociada a un endomorfismo respecto a una base ortonormal corresponda a una transformación ortogonal ha de cumplir  $TT^t = Id$ . En nuestro caso:

$$TT^t = \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 2a^2 - b^2 & 0 \\ 2a^2 - b^2 & 2a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 \end{pmatrix}$$

Igualando a la identidad obtenemos las ecuaciones:

$$2a^2 + b^2 = 1, \quad 2a^2 - b^2 = 0, \quad 2b^2 = 1.$$

Notamos que la primera es la suma de las otras dos (dependiente) luego queda:

$$a^2 = b^2/2, \quad b^2 = 1/2.$$

De donde  $b = \pm\sqrt{1/2}$  y obtenemos cuatro soluciones:

- Caso I):  $a = 1/2, b = -1/\sqrt{2}$ .
- Caso II):  $a = 1/2, b = 1/\sqrt{2}$ .
- Caso III):  $a = -1/2, b = -1/\sqrt{2}$ .
- Caso IV):  $a = -1/2, b = 1/\sqrt{2}$ .

(ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

Para clasificar la transformación basta saber su traza y su determinante. Tenemos:

$$\det(A) = 4ab^2, \quad \text{traza}(A) = 2a.$$

Entonces:

- Caso I):  $\det(A) = 1, \text{traza}(A) = 1$ . Se trata de un giro de ángulo  $\alpha$  verificando:  $2\cos(\alpha) + 1 = 1$ , es decir  $\cos(\alpha) = 0$ . Por tanto un giro de  $\pm\pi/2$ .

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es  $(1, 1, 0)$ . Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera  $(1, 0, 0)$  y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de  $-\pi/2$  respecto al semieje generado por  $(1, 1, 0)$ .

- Caso II):  $\det(A) = 1$ ,  $\text{traza}(A) = 1$ . Se trata de un giro de ángulo  $\alpha$  verificando:  $2\cos(\alpha) + 1 = 1$ , es decir  $\cos(\alpha) = 0$ . Por tanto un giro de  $\pm\pi/2$ .

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es  $(1, 1, 0)$ . Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera  $(1, 0, 0)$  y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de  $\pi/2$  respecto al semieje generado por  $(1, 1, 0)$ .

- Caso III):  $\det(A) = -1$ ,  $\text{traza}(A) = -1$ . Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo  $\alpha$  verificando:  $2\cos(\alpha) - 1 = -1$ , es decir  $\cos(\alpha) = 0$ . Por tanto un giro de  $\pm\pi/2$ . El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor  $-1$ :

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff x/2 - y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es  $(1, 1, 0)$ . Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera  $(1, 0, 0)$  y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de  $-\pi/2$  respecto al semieje generado por  $(1, 1, 0)$ , compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al semieje:  $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$ .

- Caso IV):  $\det(A) = -1$ ,  $\text{traza}(A) = -1$ . Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo  $\alpha$  verificando:  $2\cos(\alpha) - 1 = -1$ , es decir  $\cos(\alpha) = 0$ . Por tanto un giro de  $\pm\pi/2$ . El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor  $-1$ :

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff x/2 - y/2 + z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es  $(1, 1, 0)$ . Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera  $(1, 0, 0)$  y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1/2, -1/2, -1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de  $\pi/2$  respecto al semieje generado por  $(1, 1, 0)$ , compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al semieje:  $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$ .

---

**12.**— En el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica, para cada par de números reales  $a, b \in \mathbb{R}$  se considera el endomorfismo:

$$t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x, y, z) = (ax + bz, -y, bx + az)$$

(i) Hallar los valores de  $a, b$  para que  $t$  sea una transformación ortogonal.

La matriz asociada al endomorfismo respecto de la base canónica es:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Para que sea una transformación ortogonal ha de cumplirse:

$$T_C^t T_C = Id.$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = 1, \quad 2ab = 0.$$

De la segunda ecuación deducimos que  $a = 0$  ó  $b = 0$ . Y combinado con la primera tenemos cuatro casos:

CASO I.  $a = 0$  y  $b = 1$ .

CASO II.  $a = 0$  y  $b = -1$ .

CASO III.  $a = 1$  y  $b = 0$ .

CASO IV.  $a = -1$  y  $b = 0$ .

(ii) Para cada uno de los casos determinados en el apartado anterior, clasificar la transformación describiéndola geoméricamente.

En cada caso el determinante indica el tipo de transformación ortogonal (giro, si vale 1 ó giro compuesto con una simetría respecto a un plano si es  $-1$ ). Tenemos:

$$\det(T_C) = b^2 - a^2.$$

CASO I.  $a = 0$  y  $b = 1$ .

Se tiene que  $\det(T_C) = 1$ . Se trate de un giro. El ángulo  $\alpha$  de giro cumple:  $1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) = -1$ . De donde  $\cos(\alpha) = -1$  y  $\alpha = 180^\circ$ .

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al 1:

$$(T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff -x + z = 0, \quad -2y = 0$$

Tomamos por ejemplo el vector  $(1, 0, 1)$ .

En definitiva se trata de un giro de  $180^\circ$  respecto al semieje generador por el vector  $(1, 0, 1)$ ; equivalentemente una simetría respecto a la recta generada por  $(1, 0, 1)$ .

CASO II.  $a = 0$  y  $b = -1$ .

Se tiene que  $\det(T_C) = 1$ . Se trata de nuevo de un giro. El ángulo  $\alpha$  de giro cumple:  $1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) = -1$ . De donde  $\cos(\alpha) = -1$  y  $\alpha = 180^\circ$ .

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al 1:

$$(T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff -x - z = 0, \quad -2y = 0$$

Tomamos por ejemplo el vector  $(1, 0, -1)$ .

En definitiva se trata de un giro de  $180^\circ$  respecto al semieje generador por el vector  $(1, 0, -1)$ ; equivalentemente una simetría respecto a la recta generada por  $(1, 0, -1)$ .

CASO III.  $a = 1$  y  $b = 0$ .

Se tiene que  $\det(T_C) = -1$ . Se trata de un giro compuesto con una simetría. El ángulo  $\alpha$  de giro cumple:  $-1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) = 1$ . De donde  $\cos(\alpha) = 1$  y  $\alpha = 0^\circ$ .

Dado que el ángulo es de cero grados, en realidad simplemente es una simetría respecto a un plano. El plano de simetría es el espacio de autovectores asociados al 1:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\}$$

Es una simetría respecto al plano  $y = 0$ .

CASO IV.  $a = -1$  y  $b = 0$ .

Se tiene que  $\det(T_C) = -1$ . Se trata de un giro compuesto con una simetría. El ángulo  $\alpha$  de giro cumple:  $-1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) = -3$ . De donde  $\cos(\alpha) = -1$  y  $\alpha = 180^\circ$ .

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al  $-1$ :

$$(T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff 0 = 0.$$

Es decir el espacio de autovectores asociados al  $-1$  es todo  $\mathbb{R}^3$ . Puede tomarse cualquier vector como semieje, por ejemplo,  $(1, 0, 0)$ . Se trata por tanto de un giro de  $180^\circ$  y semieje generado por  $(1, 0, 0)$  compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal a tal vector, el plano  $YZ$ .

**Observación:** En realidad en este caso la matriz asociada es  $-Id$ . Directamente se deduce que es una simetría respecto al origen.

**13.**— Consideramos el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual. Sea  $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación ortogonal y  $T$  la matriz asociada a  $t$  respecto a una base  $B$  arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si  $B$  es una base ortonormal entonces  $T$  es simétrica.

FALSO. Por ejemplo si  $T$  es una matriz de giro de  $90$  grados queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90) & -\sin(90) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica.

(ii) Si  $B$  es una base ortonormal entonces  $T^{-1} = T^t$ .

VERDADERO. La condición para que una transformación sea ortonormal es que la matriz asociada respecto a una base ortonormal cumpla  $TT^t = Id$ . Esto equivale a  $T^{-1} = T^t$ .

(iii) Si  $T$  es una simetría respecto a una recta entonces  $\text{traza}(T) = -1$ .

VERDADERO. Respecto a una base formada por el vector director de la recta y dos vectores más ortogonales a éste, la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene traza  $-1$ . Como la traza se conserva por semejanza, no depende de la base en la que trabajemos, y por tanto la afirmación es cierta.

(iv) Si  $\text{traza}(T) = -1$  entonces  $T$  es una simetría respecto a una recta.

FALSO. La matriz de un giro de noventa grados compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al eje de giro, en una base adecuada es:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene traza  $-1$ , pero no es una simetría respecto a una recta.

(v) Si  $T^{2012}$  es un giro entonces  $T$  es un giro.

FALSO. La matriz de una simetría respecto a un plano es (respecto a una base adecuada):

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple  $T^{2012} = Id$  (giro de cero grados) pero  $T$  no es una matriz de giro.

**14.**— En  $\mathbb{R}^3$  dotado del producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica se consideran las transformaciones ortogonales  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se sabe que  $f$  es un giro de 90 grados y  $g$  un giro de 30 grados. Sean  $A, B$  las matrices asociadas respectivamente a  $f$  y  $g$  con respecto a la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i)  $A \cdot B$  es la matriz de una transformación ortogonal.

VERDADERO.  $A$  y  $B$  son un par de matrices asociadas a transformaciones ortogonales respecto a una base ortonormal. Por tanto cumplen  $A^t A = Id$  y  $B^t B = Id$ . Veamos que su producto cumple también esta propiedad, es decir,  $(AB)^t(AB) = Id$ :

$$(AB)^t(AB) = (B^t A^t)AB = B^t(A^t A)B = B^t Id B = B^t B = Id.$$

(ii)  $A \cdot B$  es la matriz de un giro.

VERDADERO. La matriz asociada a una transformación ortogonal es un giro si y sólo si su determinante es 1. Como  $f$  y  $g$  son, por hipótesis, giros se cumple que  $\det(A) = \det(B) = 1$ . Entonces:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1.$$

Y por tanto  $AB$  es la matriz de un giro.

(iii)  $A \cdot B$  es la matriz de un giro de 120 grados.

FALSO. No tiene porque ser cierto. Por ejemplo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ 0 & \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix},$$

es una matriz de giro de 90 grados y semieje  $(1, 0, 0)$ . La matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ 0 & \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix},$$

Es una matriz de giro de 30 grados y semieje generado por  $(-1, 0, 0)$  (ya que si se invierte el sentido del semieje de giro cambia el signo del ángulo). Su producto es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ 0 & \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix},$$

que es una matriz de giro de 60 grados.

(iv) Si  $f$  y  $g$  tiene el mismo eje de giro,  $A \cdot B$  es la matriz de un giro de 120 grados.

FALSO. El ejemplo descrito en el apartado anterior lo justifica.

(v)  $A \cdot B$  puede ser la matriz de un giro de 60 grados.

VERDADERO. Basta considerar el ejemplo del caso (iii).

I.— Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo. Sea  $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$  una base de  $V$  que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base  $B$  es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo  $\pi/3$  respecto al semieje generado por el vector  $(1, 0, 0)$

Construiremos una base ortonormal  $B'$ , en la que el primer vector coincida con el semieje de giro. Tomamos:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0)_B.$$

Ahora buscamos vectores ortogonales a él:

$$(x, y, z)G_B(1, 0, 0)^t = 0 \iff x = 0.$$

Escogemos el vector  $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$  y buscamos un vector cumpliendo esta ecuación y además ortogonal a  $\bar{u}_2$ :

$$(x, y, z)G_B(0, 1, 0)^t = 0 \iff 2y + z = 0.$$

Escogemos el vector  $\bar{u}_3 = (0, -1, 2)$ . Comprobemos si  $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$  tienen la misma orientación que la base  $B$ :

$$|M_{BB'}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vemos que tienen la misma orientación. La base  $B''$  es ortogonal. Normalicémosla dividiendo cada vector por su norma:

$$\|\bar{u}_1\|^2 = (1, 0, 0)G_B(1, 0, 0)^t = 1 \Rightarrow \|\bar{u}_1\| = 1.$$

$$\|\bar{u}_2\|^2 = (0, 1, 0)G_B(0, 1, 0)^t = 2 \Rightarrow \|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}.$$

$$\|\bar{u}_3\|^2 = (0, -1, 2)G_B(0, -1, 2)^t = 2 \Rightarrow \|\bar{u}_3\| = \sqrt{2}.$$

En definitiva tomamos la base  $B'' = \{(1, 0, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$ . La matriz de giro en dicha base será:

$$T_{B''B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sólo resta hacer un cambio de base:

$$T_{BB} = M_{BB''}T_{B''B''}M_{B''B},$$

donde

$$M_{BB''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y  $M_{B''B} = M_{BB''}^{-1}$ . Operando queda:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Segundo parcial, junio 2006)

**II.**— En  $\mathbb{R}^3$  con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos  $OX, OY, OZ$  en, respectivamente, los semiejes positivos  $OY, OZ, OX$ .

Los semiejes positivos  $OX, OY, OZ$  están generados respectivamente por los vectores de la base canónica  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ . La transformación ortogonal  $t$  que nos piden cumple:

$$t(e_1) = e_2, \quad t(e_2) = e_3, \quad t(e_3) = e_1.$$

Por tanto su matriz asociada respecto de la base cañónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica que  $\det(T) = 1$  y  $\text{traza}(T) = 0$ . Se trata por tanto de un giro de ángulo  $\alpha$  dado por:

$$2\cos(\alpha) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2\pi}{3}.$$

El semieje de giro viene dado por un autovector asociado al 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x + z = 0, \quad x - y = 0 \iff (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}.$$

Finalmente decidimos el signo del ángulo de giro. Nos fijamos en la orientación de  $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), t(1, 0, 0) = (0, 1, 0)\}$ :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Se trata de un giro de ángulo  $\frac{2\pi}{3}$  y semieje generador por  $(1, 1, 1)$ .

**III.**— Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

-  $f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ .

-  $\det(F_{CC}) = -1$ .

-  $\text{traza}(F_{CC}) = 1$ .

Teniendo en cuenta que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto de bases diferentes tienen la misma traza y el mismo determinante, sabemos que podemos clasificar la transformación ortogonal con los datos dados.

Como  $\text{traza}(F_{CC}) = 1$  y  $\det(F_{CC}) = -1$  vemos que se trata de una simetría respecto de un plano, de manera que respecto a una base adecuada la matriz asociada sería:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El plano es perpendicular al autovector asociado al  $-1$ . Pero tal autovector nos lo dan en el enunciado ya que  $f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ . Por tanto el plano de simetría es:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

**IV.**— Sea  $T$  la matriz asociada a una transformación ortogonal  $\mathbb{R}^2$  respecto a una base arbitraria. Razonar la veracidad o la falsedad de las siguientes cuestiones:

Observamos primeramente que la traza y determinante de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base en la que estemos trabajando. Eso es consecuencia de que la semejanza conserva traza y determinante. Por otra parte sabemos que una transformación ortogonal en el plano es:

- O bien una simetría respecto a una recta, y entonces en una cierta base  $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  y por tanto  $\det(T) = -1$  y  $\text{traza}(T) = 0$ ;

- o bien un giro y entonces en una base ortonormal  $T_B = \begin{pmatrix} \cos(A) & -\sin(A) \\ \sin(A) & \cos(A) \end{pmatrix}$  y por tanto  $\det(T) = 1$  y  $\text{traza}(T) = 2\cos(A)$ .

(i)  $|\text{traza}(T)| \leq 2$ .

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, bien  $\text{traza}(T) = 0$  ó  $|\text{traza}(T)| = |2\cos(A)| \leq 2 \cdot 1$ .

(ii) Si  $\text{traza}(T) = 2$  entonces  $T = Id$ .

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, si  $\text{traza}(T) = 2$  necesariamente es un giro de ángulo  $A$  verificando  $2\cos(A) = 2$ . Pero entonces el ángulo  $A$  es cero y un giro de cero grados es precisamente la transformación identidad.

(iii) Si  $\det(T) = -1$  entonces  $\text{traza}(T) = 0$ .

VERDADERO. Si  $\det(T) = -1$  hemos visto que se trata de una simetría y por tanto  $\text{traza}(T) = 0$ .

(iv) Si  $\text{traza}(T) = 0$  entonces  $\det(T) = -1$ .

FALSO. Por ejemplo si es un giro de ángulo  $A = \pi/2$  tenemos  $\text{traza}(T) = 2\cos(\pi/2) = 0$ , pero  $\det(T) = 1$ .

**V.**— En  $\mathbb{R}^2$  con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector  $(3, 4)$  en el vector:

a)  $(2, 6)$ .

b)  $(4, 3)$

Las transformaciones ortogonales de  $\mathbb{R}^2$  directas son los giros. Además recordemos que una transformación ortogonal debe de conservar el módulo de los vectores. Comenzamos comprobando si el vector inicial y su candidato a vector transformado tienen el mismo módulo:

$$\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\|(2, 6)\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\|(4, 3)\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Concluimos que:

a) No existe ninguna transformación ortogonal que lleve  $(3, 4)$  en  $(2, 6)$  porque ambos vectores no tienen el mismo módulo.

b) Podemos construir un giro que lleve el vector  $(3, 4)$  en el  $(4, 3)$ , porque ambos tienen el mismo módulo. Sabemos que la matriz de giro respecto de la base canónica y es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

El ángulo  $\alpha$  de giro cumple:

$$\cos(\alpha) = \frac{(3,4) \cdot (4,3)}{\|(3,4)\| \|(4,3)\|} = \frac{24}{25}.$$

Entonces:

$$\sin(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2} = \pm \frac{7}{25}$$

Por tanto la matriz de giro es una de estas dos:

$$A = \begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad B = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos cual de las dos es la que buscamos teniendo en cuenta que nuestra dicha de giro  $T$  ha de cumplir:

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{25} \\ \frac{117}{25} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así la transformación ortogonal pedida viene dada por las ecuaciones:

$$t(x,y) = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24x+7y}{25} \\ \frac{-7x+24y}{25} \end{pmatrix}.$$

**VI.**— En  $\mathbb{R}^2$  y en una base orientada  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , tal que el módulo de  $\vec{e}_1$  es 1 y el de  $\vec{e}_2$  es  $\sqrt{2}$ . Hallar todas las transformaciones ortogonales que transforman el vector  $\vec{e}_1$  en el vector  $\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2$ .

Sea  $F$  la matriz del endomorfismo y  $G$  la matriz de Gram, ambas con respecto a la base dada. Para que  $F$  sea ortogonal se ha de cumplir:

$$G = F^t G F$$

Sabemos:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}; \quad F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

En particular ha de cumplirse que:

$$\left\| \frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2 \right\| = \|\vec{e}_1\|$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow b = -1$$

Ahora la condición  $G = F^t G F$  queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 25 &= 49 - 28 - 28 + 32 \\ -25 &= 3\alpha + \beta \\ 50 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \end{aligned}$$

de donde resultan dos soluciones:

$$\alpha = -8 \text{ y } \beta = -1; \quad \text{ó} \quad \alpha = -6 \text{ y } \beta = -7;$$

Veamos cada una de ellas:

- **Caso I:**  $F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = 1$$

y por tanto dado que  $F \neq Id$  y  $F \neq -Id$  se trata de un giro. y la traza es:

$$\text{traza}(F) = 6/5.$$

Por tanto el ángulo  $\alpha$  cumple:

$$\cos(\alpha) = \text{traza}(F)/2 = 3/5.$$

Para ver el signo que ha de tomarse comprobamos la orientación de:

$$B = \{(1, 0), F(1, 0)\} = \{(1, 0), (7/5, 4/5)\}.$$

Vemos que:

$$|M_{CB}| = 4/5 > 0$$

Por tanto el ángulo de giro es  $+\arccos(3/5)$ .

- **Caso II:**  $F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ .

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = -1$$

y por tanto se trata de una simetría ortonormal. El eje de simetría corresponde al espacio característico asociado al autovalor  $\lambda = 1$ :

$$(F - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 6y = 0 \iff S_1 = \mathcal{L}\{(3, 1)\}$$

**(Examen final, junio 2004)**

---

**VII.**— En  $\mathbb{R}^3$  consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea  $B$  una base de  $\mathbb{R}^3$  dada por:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

y  $f$  el endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz asociada con respecto a la base  $B$  es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que  $f$  es una transformación ortogonal.

Para manejar mas comodamente  $f$  primero escribimos su matriz con respecto a una base ortonormal. En particular con respecto a la base canónica  $C$ :

$$F_{CC} = M_{CB}F_{BB}M_{BC},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora dado que  $C$  es un base ortonormal basta comprobar que  $F_{CC} \cdot F_{CC}^t = Id$ .

(b) *Clasificar razonadamente  $f$ , indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.*

Vemos que:

$$\det(F) = -1; \quad \text{traza}(F) = 1/5.$$

Se trata de una simetría respecto al plano  $S_{-1}^{\perp}$  compuesto con un giro de eje  $S_{-1}$  y ángulo  $\alpha$  verificando:

$$\cos(\alpha) = (\text{traza}(F) + 1)/2 = 3/5.$$

Tomamos como semieje de giro un vector de  $S_{-1}$ :

$$S_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (F_{CC} + 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}.$$

por ejemplo  $(0, 1, 0) \in S_{-1}$ .

Para saber si el ángulo es positivo o negativo basta comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de la base  $B$  a la canónica, donde:

$$B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), f(1, 0, 0)\} = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (3/5, 0, 4/5)\}$$

y

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -4/5 < 0$$

Por tanto el ángulo de giro es  $-\arccos(3/5)$  y el semieje del giro  $(0, 1, 0)$ .

**(Examen final, diciembre 2005)**

**VIII.**— *Se considera un espacio vectorial euclídeo  $V$  de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base  $B$ . Determinar e interpretar geoméricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en  $V$  y cuya matriz en la base  $B$  tenga traza nula.*

Sea  $T$  la matriz de una transformación ortogonal de  $V$  en la base ortonormal dada  $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ . Como el espacio vectorial  $V$  tiene dimensión 3, el polinomio característico de  $T$  tiene grado 3. Por tanto necesariamente hay al menos una raíz real. Por ser  $T$  ortogonal esta corresponde a un autovalor 1 o  $-1$ . Además como suponemos que la transformación no es diagonalizable hay un único autovalor real. Deducimos que la matriz de la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Si la traza es 0 se verifica que  $\pm 1 + 2\cos(\alpha) = 0$ . Puede haber dos casos:

(i)  $\cos(\alpha) = -1/2$  y entonces  $\alpha$  es un ángulo de  $\pm 120$  grados. La matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a un giro de 120 grados o  $-120$  grados respectivamente, respecto al vector  $\bar{v}_1$ .

- (ii)  $\cos(\alpha) = 1/2$  y entonces  $\alpha$  es un ángulo de  $\pm 60$  grados. Ahora, la matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por  $\bar{v}_2, \bar{v}_3$  compuesta con un giro de 60 grados o  $-60$  grados respectivamente, respecto al vector  $\bar{v}_1$ .

**IX.**— En  $\mathbb{R}^3$  con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial  $U$  en  $V$ .

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el semieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es  $u = (4, 0, 3)$  y de la segunda  $v = (0, 1, 0)$ . El ángulo que forman cumple:

$$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{(4, 0, 3) \cdot (0, 1, 0)}{\|(4, 0, 3)\| \|(0, 1, 0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4, 0, 3) \times (0, 1, 0) = (-3, 0, 4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por  $(-3, 0, 4)$  ó  $(3, 0, -4)$ . Como queremos el que el vector  $u$  vaya hacia el  $v$ , si tomamos como semieje el generado por  $(-3, 0, 4)$  la base:

$$\{(-3, 0, 4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \text{orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3, 0, 4), (4, 0, 3), (0, 1, 0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B = \{(-3/5, 0, 4/5), (4/5, 0, 3/5), (0, 1, 0)\}$$

En la base  $B$  la matriz de giro es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90) & -\sin(90) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso  $M_{BC}$  es ortogonal ( $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$ ) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$G_C = M_{CB}G_B M_{BC} = M_{CB}G_B M_{CB}^{-1} = M_{CB}G_B M_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -12/25 & -3/5 & 16/25 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x/25 - 4y/5 - 12z/25 \\ 4x/5 + 3z/5 \\ -12x/25 - 3y/5 + 16z/25 \end{pmatrix}.$$

**X.**— Determinar si el endomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  cuya matriz respecto a una base ortonormal es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

Teniendo en cuenta que  $A$  es la matriz asociada a un endomorfismo respecto a una base ortogonal, una condición necesaria y suficiente para que corresponda a una transformación ortogonal es que:

$$A \cdot A^t = Id.$$

Vemos que efectivamente se cumple:

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = Id. \end{aligned}$$

Para clasificarla observamos que  $\det(A) = -1$ . Por tanto se trate de una simetría respecto al subespacio de autovectores asociados al 1.

$$(A - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x(\cos(\alpha) - 1) + y\sin(\alpha) = 0.$$

Un vector que cumpla esta ecuación generará el eje:

$$(\sin(\alpha), 1 - \cos(\alpha)).$$

**Observación:** Puede expresarse esta dirección de forma más clarificadora. Tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2). \\ 1 - \cos(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2) = 2\sin^2(\alpha/2). \end{aligned}$$

Por tanto la dirección anterior esta generada por el vector:

$$(2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2), 2\sin^2(\alpha/2)) \quad \text{paralelo a} \quad (\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2)).$$

Esto significa que el eje de simetría forma un ángulo de  $\alpha/2$  con el eje  $OX$ .

**(Examen final, junio 2006)**

**XI.**— En  $\mathbb{R}^3$  se consideran dos vectores independientes  $\bar{v}$  y  $\bar{u}$  que forman entre sí un ángulo  $\alpha$ . Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por  $\bar{v}$  y de la simetría respecto del subespacio generado por  $\bar{u}$  es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

En primer podemos suponer que ambos vectores tienen norma 1, ya que esto no influye a la hora de definir las simetrías. En concreto podemos tomar una base ortonormal  $B = \{(\bar{v}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\}$ . De manera que  $\bar{u} \in \mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$ . Trabajaremos con coordenadas contravariantes en esta base. Como  $\bar{u}$  forma un ángulo  $\alpha$  con  $\bar{v}$ , las coordenadas de  $\bar{u}$  son  $(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$ .

Ahora en la base  $B$  la primera simetría tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la segunda simetría tomamos primero un vector normal ortogonal a  $\bar{u}$  que esté en  $\mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$ . Por ejemplo,  $(-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0)$ . Consideramos la base  $B' = \{\bar{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0), (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ . Tiene la misma orientación que  $B$ . La matriz de la segunda simetría en esta segunda base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos interesa expresarla en la base inicial. Hagamos el cambio de base:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora componemos ambas:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y vemos que queda precisamente la composición de dos giros de  $\alpha$  grados, es decir, obtenemos un giro de  $2\alpha$  grados respecto al vector  $\bar{e}_3$  ortogonal al espacio generado por  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$ .

**(Segundo parcial, junio 2002)**

**XII.**— Sea  $T$  la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo  $V$  de dimensión 3. Se sabe que  $\text{traza}(T) = 2$ . Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

Sabemos que al cambiar de base la matriz asociada se conservan el determinante y la traza. Las trazas posibles para una transformación ortogonal en dimensión 3 son:

- $\text{Traza} = 3$  si la aplicación es la identidad.
- $\text{Traza} = 1$  si se trata de una simetría respecto a un plano o un giro.
- $\text{Traza} = -1$  si se trata de una simetría respecto a una recta o un giro ms simetría.
- $\text{Traza} = -3$  si se trata de una simetría respecto al origen.
- $-1 < \text{traza} = 1 + 2\cos(A) < 3$  y  $\text{traza} \neq 1$  si se trata de un giro de ángulo  $A$  respecto a un determinado eje.
- $-3 < \text{traza} = -1 + 2\cos(A) < 1$  y  $\text{traza} \neq -1$  si se trata de un giro de ángulo  $A$  respecto a un determinado eje compuesto con una simetría.

En nuestro caso  $\text{traza}(T) = 2$ . Luego necesariamente se trata de un giro. El ángulo  $A$  cumple:

$$1 + 2\cos(A) = 2 \Rightarrow \cos(A) = 1/2 \Rightarrow A = \pi/3.$$

