ÁLGEBRA LINEAL II — Soluciones a la Práctica 2.1-2.2

Espacios Euclídeos. Ortogonalidad (Curso 2017–2018)

1.– *Se considera un espacio euclídeo de dimensión 3, y en él una base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$ tal que el módulo de $\bar{e}_1$ y el de $\bar{e}_3$ es 2 y el de $\bar{e}_2$ es 1, y además el ángulo formado por $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_3$ es de 90^o y los formados por $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ y por $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ son de 60^o. Se dan los vectores*

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{b} &= \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{aligned}$$

Se pide:

(a) *Matriz de Gram en la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$*

La matriz que buscamos es:

$$G = \begin{pmatrix} \bar{e}_1\cdot\bar{e}_1 & \bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 & \bar{e}_1\cdot\bar{e}_3 \\ \bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 & \bar{e}_2\cdot\bar{e}_2 & \bar{e}_2\cdot\bar{e}_3 \\ \bar{e}_1\cdot\bar{e}_3 & \bar{e}_2\cdot\bar{e}_3 & \bar{e}_3\cdot\bar{e}_1 \end{pmatrix}$$

donde $\bar{e}_i.\bar{e}_j = f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ siendo f la forma bilineal simétrica definida positiva asociada al espacio euclídeo.

Los datos que nos dan son:

$$\begin{aligned}
&\|\bar{e}_1\| = \|\bar{e}_3\| = 2 \quad\Rightarrow\quad \bar{e}_1\cdot\bar{e}_1 = \bar{e}_3\cdot\bar{e}_3 = 2^2 = 4\\
&\|\bar{e}_2\| = 1 \quad\Rightarrow\quad \bar{e}_2\cdot\bar{e}_2 = 1^2 = 1\\
&cos(\bar{e}_1,\bar{e}_3) = cos(90) \quad\Rightarrow\quad \frac{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_3}{\|\bar{e}_1\|\|\bar{e}_3\|} = 0 \quad\Rightarrow\quad \bar{e}_1\cdot\bar{e}_3 = 0\\
&cos(\bar{e}_1,\bar{e}_2) = cos(60) \quad\Rightarrow\quad \frac{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2}{\|\bar{e}_1\|\|\bar{e}_2\|} = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 = 1\\
&cos(\bar{e}_2,\bar{e}_3) = cos(60) \quad\Rightarrow\quad \frac{\bar{e}_2\cdot\bar{e}_3}{\|\bar{e}_2\|\|\bar{e}_3\|} = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \bar{e}_2\cdot\bar{e}_3 = 1
\end{aligned}$$

y por tanto la matriz de Gram es:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) *Módulo de $\bar{a}$ y de $\bar{b}$.*

Tenemos:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}} \qquad \|\bar{b}\| = \sqrt{\bar{b}\cdot\bar{b}}$$

Para calcular los productos escalares utilizamos la matriz de Gram en la base $\{\bar{e}\}$:

$$\begin{aligned} \bar{a}\cdot\bar{a} &= (\,1 \quad -1 \quad 0\,)\,G\,\{\,1 \quad -1 \quad 0\,\} = 3 \\ \bar{b}\cdot\bar{b} &= (\,1 \quad -2 \quad 1\,)\,G\,\{\,1 \quad -2 \quad 1\,\} = 4 \end{aligned}$$

y entonces:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{3} \qquad \|\bar{b}\| = \sqrt{4} = 2$$

(c) *Producto escalar de $\bar{a}$ por $\bar{b}$.*

Simplemente utilizamos la matriz de Gram del producto escalar:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (\,1 \quad -1 \quad 0\,)\,G\,\{\,1 \quad -2 \quad 1\,\} = 2$$

(d) *Calcular un vector de módulo 2, que forme un ángulo de* 90^o *con* $\bar{a}$ *y uno de* 60^o *con* $\bar{b}$.

Buscamos un vector $\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3$ verificando:

$$\|\bar{v}\| = 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}\cdot\bar{v} = 4$$
$$cos(\bar{v},\bar{a}) = cos(90) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{v}\cdot\bar{a}}{\|\bar{v}\|\|\bar{a}\|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}\cdot\bar{a} = 0$$
$$cos(\bar{v},\bar{b}) = cos(60) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{v}\cdot\bar{b}}{\|\bar{v}\|\|\bar{b}\|} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{v}\cdot\bar{b} = 2$$

Utilizando la matriz de Gram para hacer los productos escalares, obtenemos que las dos últimas ecuaciones se escriben:

$$0 = 3v_1 - v_3$$
$$2 = 2v_1 + 2v_3$$

Vemos que $v_1 = \frac{1}{4}$ y $v_3 = \frac{3}{4}$. Aplicando ahora la primera condición:

$$\bar{v}\cdot\bar{v} = 4 \quad \Rightarrow \quad (v_2)^2 + 2v_2 - \frac{3}{2} = 0$$

Resolviendo la ecuación resulta $v_2 = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ y por tanto hay dos vectores cumpliendo las condiciones que nos piden:

$$\frac{1}{4}\bar{e}_1 + (-1 + \frac{\sqrt{10}}{2})\bar{e}_2 + \frac{3}{4}\bar{e}_3 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{4}\bar{e}_1 + (-1 - \frac{\sqrt{10}}{2})\bar{e}_2 + \frac{3}{4}\bar{e}_3$$

2.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera una forma bilineal* f *cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

(i) *Probar que* F_C *define un producto escalar.*

Un producto escalar es una forma bilineal simétrica y definida positiva. El enunciado ya nos dice que es una forma bilineal. Dado que su matriz asociada es simétrica, la correspondiente forma es también simétrica.

Sólo queda ver que es definida positiva, para ello comprobamos diagonalizando por congruencia que su signtaura es $(3,0)$:

$$F_C \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Con respecto al producto escalar definido por* f:

a) *Calcular una base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$.

Una base ortonormal es aquella respecto a la cuál la matriz del producto escalar es la identidad. Teniendo en cuenta que el cambio de base se hace por congruencia completamos la diagonalización del apartado anterior hasta llegar a Id:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_2(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \overset{\mu_2(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} = Id = F_B$$

Para hallar la base B realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos en el proceso de diagonalización, obteniendo la matriz de cambio de base M_{CB}.

$$Id \xrightarrow{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2(1/\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{BC}$$

Las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base canónica son las columnas de la matriz:

$$B = \{(1,0,0), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,-2,1)\}$$

b) *Calcular la norma del vector* $(-1,1,0)$.

Por definición:

$$\|(-1,1,0)\| = \sqrt{(-1,1,0)\cdot(-1,1,0)}$$

y

$$(-1,1,0)\cdot(-1,1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

En definitiva:

$$\|(-1,1,0)\| = \sqrt{2}.$$

3.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$*, se conoce la matriz fundamental del producto escalar en la base canónica*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y dos subespacios vectoriales $U = \mathcal{L}\{(1,1,1)\}$ *y* $V = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,-1)\}$*. Se pide:*

(a) *Proyección ortogonal de* $(2,1,3)$ *sobre el subespacio* U*.*

Buscamos $\bar{u} \in U$ (es decir, $\bar{u} = a(1,1,1)$) tal que $((2,1,3) - a(1,1,1))\cdot(1,1,1) = 0$. Por tanto:

$$a = \frac{(2,1,3)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}$$

Aplicando la matriz de Gram para hacer el producto escalar obtenemos:

$$a = \frac{29}{14} \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = (\frac{29}{14}, \frac{29}{14}, \frac{29}{14})$$

(b) *Matriz de la proyección ortogonal sobre* U*.*

Método I:

Sea (x,y,z) las coordenadas de un vector cualquiera respcto a la base canónica. Calculemos su proyección. Como antes buscamos $\bar{u} = a(1,1,1)$ tal que $((x,y,z) - a(1,1,1))\cdot(1,1,1) = 0$ Por tanto:

$$a = \frac{(x,y,z)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = \frac{3x+5y+6z}{14}$$

Por tanto la proyección es:

$$\bar{u} = (\frac{3x+5y+6z}{14}, \frac{3x+5y+6z}{14}, \frac{3x+5y+6z}{14})$$

y la matriz respecto a la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 3/14 & 5/14 & 6/14 \\ 3/14 & 5/14 & 6/14 \\ 3/14 & 5/14 & 6/14 \end{pmatrix}$$

Método II:

Calculamos una base del ortogonal de U:

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{(x,y,z) \in R^3 |\, (x,y,z) \cdot (1,1,1) = 0\} = \{(x,y,z) \in R^3 |\, (x,y,z) G (1,1,1)^t = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in R^3 |\, 3x + 5y + 6z = 0\} = \mathcal{L}\{(2,0,-1),(5,-3,0)\} \end{aligned}$$

Como sabemos que U y $U^\perp$ son suplementarios, entre los dos generan todo R^3 y tenemos una base:

$$B_1 = \{\underbrace{(1,1,1)}_{U}, \underbrace{(2,0,-1),(5,-3,0)}_{U^\perp}\}.$$

Los vectores de U por la proyección ortogonal quedan fijos; los de su subespacio ortogonal van al cero. Por ranto respepecto a esta base la matriz asociada a la proyección es:

$$P_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora sólo nos queda pasarla a la base canónica:

$$P_C = M_{CB_1} P_{B_1} M_{B_1C} = M_{CB_1} P_{B_1} M_{CB_1}^{-1},$$

donde

$$M_{CB_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Haciendo las cuentas resulta:

$$P_C = \begin{pmatrix} 3/14 & 5/14 & 6/14 \\ 3/14 & 5/14 & 6/14 \\ 3/14 & 5/14 & 6/14 \end{pmatrix}.$$

Observación: Esta matriz nos permite proyectar ortogonalmente sobre U ahora cualquier vector. Por ejemplo la proyección ortogonal sobre U del $(2,1,3)$ del apartado (a) es:

$$P_C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{14} \\ \frac{29}{14} \\ \frac{29}{14} \end{pmatrix}$$

Método III: Damos la matriz en función de una base de $\mathbb{R}^3$. Para elegir la base completamos la que tenemos de U:

$$B_2 = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Ahora hallamos la proyección ortogonal de $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Procedemos **igual que en el primer apartado**:

$$\frac{(0,1,0) \cdot (1,1,1)}{(1,1,1) \cdot (1,1,1)} = \frac{5}{14} \qquad \frac{(0,0,1) \cdot (1,1,1)}{(1,1,1) \cdot (1,1,1)} = \frac{6}{14}$$

Por tanto las proyecciones de $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ son respectivamente, $\frac{5}{14}(1,1,1)$ y $\frac{3}{7}(1,1,1)$. Teniendo en cuenta que hay que escribr las coordenadas en la base B_2, la matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/14 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si quisiésemos la matriz en la base canónica, basta hallar la proyección de $(0,1,0)$ ó hacer el hacer el cambio de base a partir de la anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5/14 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/14 & 5/14 & 6/14 \\ 3/14 & 5/14 & 6/14 \\ 3/14 & 5/14 & 6/14 \end{pmatrix}$$

(c) *Matriz de la proyección ortogonal sobre V.*

Método I:

Sea (x,y,z) cualquiera. Calculamos su proyección en V. Será de la forma $\bar{v} = a(1,0,1) + b(1,1,-1)$ verificando:

$$((x,y,z) - \bar{v}) \cdot (1,0,1) = 0$$
$$((x,y,z) - \bar{v}) \cdot (1,1,-1) = 0$$

es decir:

$$a(1,0,1)\cdot(1,0,1) + b(1,1,-1)\cdot(1,0,1) = (x,y,z)\cdot(1,0,1)$$
$$a(1,0,1)\cdot(1,1,-1) + b(1,1,-1)\cdot(1,1,-1) = (x,y,z)\cdot(1,1,-1)$$

Operando:

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z &= 6a+b \\ x+y &= a+2b \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación:

$$a = \frac{3x+5y+8z}{11} \qquad b = \frac{4x+3y-4z}{11}$$

La proyección queda:

$$\bar{v} = (\frac{7x+8y+4z}{11}, \frac{4x+3y-4z}{11}, \frac{-x+2y+12z}{11})$$

y la correspondiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 7/11 & 8/11 & 4/11 \\ 4/11 & 3/11 & -4/11 \\ -1/11 & 2/11 & 12/11 \end{pmatrix}$$

Método II:

Calculamos una base del ortogonal de V:

$$\begin{aligned} V^{\perp} &= \{(x,y,z) \in R^3 |\, (x,y,z)\cdot(1,0,1) = 0, \quad (x,y,z)\cdot(1,1,-1) = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in R^3 |\, (x,y,z)G(1,0,1)^t = 0, \quad (x,y,z)G(1,1,-1) = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in R^3 |\, 2x+3y+4z = 0, \quad x+y = 0\} = \mathcal{L}\{(4,-4,1)\} \end{aligned}$$

Como sabemos que V y $V^{\perp}$ son suplementarios, entre los dos generan todo R^3 y tenemos una base:

$$B_3 = \{\underbrace{(1,0,1),(1,1,-1,}_{V}\underbrace{(4,-4,1}_{V^{\perp}}\}.$$

Los vectores de V por la proyección ortogonal quedan fijos; los de su subespacio ortogonal van al cero. Por ranto respepecto a esta base la matriz asociada a la proyección es:

$$P_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora sólo nos queda pasarla a la base canónica:

$$P_C = M_{CB_3} P_{B_3} M_{B_3C} = M_{CB_3} P_{B_3} M_{CB_3}^{-1},$$

donde

$$M_{CB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo las cuentas resulta:

$$P_C = \begin{pmatrix} 7/11 & 8/11 & 4/11 \\ 4/11 & 3/11 & -4/11 \\ -1/11 & 2/11 & 12/11 \end{pmatrix}$$

Método III: Tomamos una base cualquiera completando la de V. Ahora:

$$B_4 = \{(1,0,1), (1,1,-1), (0,0,1)\}$$

Y basta calcular la proyección de $(0,0,1)$. Será de la forma $a(1,0,1) + b(1,1,-1)$, de manera que:

$$\begin{aligned} a(1,0,1)\cdot(1,0,1) + b(1,1,-1)\cdot(1,0,1) &= (0,0,1)\cdot(1,0,1) \\ a(1,0,1)\cdot(1,1,-1) + b(1,1,-1)\cdot(1,1,-1) &= (0,0,1)\cdot(1,1,-1) \end{aligned}$$

Calculando los productos escalares utilizando la matriz de Gram obtenemos un sistema:

$$\begin{aligned} 4 =& 6a + b \\ 0 =& a + 2b \end{aligned}$$

De donde $a = 8/11$ y $b = -4/11$. La matriz de la proyección en la base B_4 es por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/11 \\ 0 & 1 & -4/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si quisiésemos la matriz de la proyección en función de la base canónica basta hacer el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/11 \\ 0 & 1 & -4/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/11 & 8/11 & 4/11 \\ 4/11 & 3/11 & -4/11 \\ -1/11 & 2/11 & 12/11 \end{pmatrix}$$

4.– *En un espacio vectorial euclídeo se considera la base* $B = \{\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3\}$*, hallar una base ortonormal sabiendo que:*

- *El módulo del vector* $\bar{u}_1$ *es igual al módulo del vector* $\bar{u}_2$*.*
- *El ángulo formado por* $\bar{u}_1$ *y* $\bar{u}_3$ *es el mismo que el formado por* $\bar{u}_2$ *y* $\bar{u}_3$*.*
- $(0 \quad 1 \quad 1)G_B = (-2 \quad 1 \quad 2)$.
- *El vector cuyas coordenadas en la base* B *son* $(1,1,1)$ *es unitario.*

Calcularemos primero la matriz de Gram asociada al espacio euclídeo. Vamos escribiendo e interpretando los datos que nos dan:

- $\|\bar{u}_1\| = |\bar{u}_2\| \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2$
- $cos(\bar{u}_1, \bar{u}_3) = cos(\bar{u}_2, \bar{u}_3) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3}{\|\bar{u}_1\|\|\bar{u}_3\|} = \dfrac{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3}{\|\bar{u}_2\|\|\bar{u}_3\|} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3 = \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3$
- $G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} G \{1 \quad 1 \quad 1\} = 1$

De las dos primeras condiciones deducimos que la matriz G es de la forma:

$$G = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a & b \\ b & b & d \end{pmatrix}$$

De la tercera condición:

$$\begin{aligned} -2 &= c + b \\ 1 &= a + b \\ 2 &= b + d \end{aligned}$$

y de la última:

$$1 = 2a + 4b + 2c + d$$

Resolviendo el sistema formado por la cuatro ecuaciones, obtenemos $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$ y $d = 3$. La matriz es:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para hallar una base ortonormal la diagonalizamos por congruencia. Recordemos que hemos de hacer operaciones filas y sus simétricas en las columnas:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_2(2)\nu_2(2) \\ H_3(2)\nu_3(2) \\ \longrightarrow\longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 12 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(1)\nu_{21}(1) \\ H_{31}(1)\nu_{31}(1) \\ \longrightarrow\longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{32}(1)}\xrightarrow{\nu_{32}(1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_1(1/\sqrt{2})\nu_1(1/\sqrt{2}) \\ H_2(1/\sqrt{6})\nu_2(1/\sqrt{6}) \\ H_3(1/\sqrt{4})\nu_3(1/\sqrt{4}) \\ \longrightarrow\longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La base ortonormal que buscamos es $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ con:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 =& \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{u}_1 \\
\bar{v}_2 =& \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{u}_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{u}_2 \\
\bar{v}_3 =& \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3
\end{aligned}$$

(Examen final, junio 2002)

5.– *Dada la forma bilineal:*

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + xy' + x'y + 2yy' + 2yz' + 2y'z + xz' + x'z + 4zz'$$

(a) *Probar que f define un producto escalar.*

Para que sea un producto escalar la forma bilineal ha de ser simétrica y definida positiva. Para analizarlo escribimos la matriz asociada respecto de la base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La forma bilineal es simétrica por que la matriz asociada lo es también.

Para comprobar que es definida positiva, la diagonalizamos por congruencia. La forma reducida ha de tener todos los términos de la diagonal positivos:

$$F_C \longrightarrow \overset{H_{31}(-1)\ H\mu_{31}(-1)}{\overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura es $(3,0)$ y así f es definida positiva.

(b) *Con el producto escalar definida por f:*

(i) *Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.*

Una base B ortonormal es aquella respecto a la cuál la matriz asociada es la identidad. Completamos la simplificación por congruencia hecha en el apartado anterior, hasta llegar a la identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_3(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow}\overset{\mu_3(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos las mismas operaciones columna que hemos aplicado en la reducción sobre la identidad, para obtener la matriz de cambio de la base ortonormal a la canónica. Las columnas de esta matriz serán los vectores de la base pedida:

$$Id \overset{H\mu_{31}(-1)}{\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_3(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Una base ortonormal es por tanto:

$$B = \{(1,0,0), (-1,1,0), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

(ii) *Hallar la proyección ortogonal del vector $(1,0,1)$ sobre el subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\}$.*

Sea $\vec{u} = (1, 0, 1)$. Las ecuaciones paramétricas del plano U son:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = -a$$

y sus vectores directores $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, 0)$.

Por tanto la proyección buscada es un vector $\vec{u}'$ de la forma $\vec{u}' = (a, b, -a)$. Tiene que cumplirse:

$$\vec{u} - \vec{u}' \perp (1, 0, -1) \quad \Rightarrow \quad (1 - a, -b, 1 + a) \cdot (1, 0, -1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 - a & b & 1 + a \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\vec{u} - \vec{u}' \perp (0, 1, 0) \quad \Rightarrow \quad (1 - a, -b, 1 + a) \cdot (0, 1, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 - a & b & 1 + a \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Operando se obtienen las ecuaciones:

$$b - 3 - 3a = 0, \qquad 1 - a + 2b + 2 + 2a = 0.$$

Y resolviendo: $a = -\frac{3}{5}$ y $b = \frac{6}{5}$. La proyección pedida es:

$$\vec{u}' = (-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}).$$

6.– *Se considera el espacio vectorial real E de las funciones continuas $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ y la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} p : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longrightarrow & \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx. \end{array}$$

(a) *Demostrar que esta aplicación dota a E de la estructura de espacio vectorial euclídeo.*

Sabemos que E es un espacio vectorial. Para ver la estrucura euclídea hay que comprobar que p es una forma bilineal, simétrica y definida positiva.

En primer lugar es claro que es simétrica, porque:

$$p(f, g) = \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\pi g(x)\, f(x)\, dx = p(g, f)$$

Por tanto para ver que es bilineal, basta con comprobar la linealidad en la primera componente. Dadas $f, g, h \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} p(\lambda f + \mu h, g) &= \int_0^\pi (\lambda f + \mu h)(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\pi (\lambda f(x) + \mu h(x))\, g(x)\, dx = \\ &= \lambda \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx + \lambda \int_0^\pi h(x)\, g(x)\, dx = \lambda p(f, g) + \mu p(h, g) \end{aligned}$$

luego se p es bilineal.

Finalmente veamos que es definida positiva. Dada $f \in E$ se verifica:

$$p(f, f) = \int_0^\pi f(x)\, f(x)\, dx = \lambda \int_0^\pi f(x)^2\, dx \geq 0$$

Además si $f \neq 0$, entonces f es no nula en un entorno del 0 por ser continua, luego:

$$p(f, f) = \int_0^\pi f(x)\, f(x)\, dx = \lambda \int_0^\pi f(x)^2\, dx > 0$$

(b) *Si llamamos U al subespacio vectorial generado por $\{1, \operatorname{sen}x, \cos x, \operatorname{sen}^2 x\}$, encontrar una base ortogonal de U usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.*

Llamemos f_1, f_2, f_3, f_4 a las cuatro funciones que buscamos. Tomamos $f_1(x) = 1$ y vamos calculando el resto utilizando el método de Gram-Schmidt. Construimos f_2:

$$f_2(x) = \operatorname{sen}x + a_1 f_1(x)$$

de manera que $p(f_2, f_1) = 0$. Por tanto:

$$a_1 = -\frac{p(\operatorname{sen}x, 1)}{p(1,1)} = -\frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}x\, dx}{\int_0^\pi 1\, dx} = -\frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad f_2(x) = \operatorname{sen}x - \frac{2}{\pi}$$

Construimos f_3:

$$f_3(x) = \cos x + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x)$$

de manera que $p(f_3, f_1) = p(f_3, f_2) = 0$. Ahora:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = -\dfrac{p(\cos x, 1)}{p(1,1)} = 0 \\ b_2 = -\dfrac{p(\cos x, f_2)}{p(f_2, f_2)} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f_3(x) = \cos x$$

Y por último f_4:

$$f_4(x) = \operatorname{sen}^2 x + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3$$

con $p(f_4, f_1) = p(f_4, f_2) = p(f_4, f_3) = 0$. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = -\dfrac{p(\operatorname{sen}^2 x, 1)}{p(1,1)} = -\dfrac{1}{2} \\ c_2 = -\dfrac{p(\operatorname{sen}^2 x, f_2)}{p(f_2, f_2)} = -\dfrac{2\pi}{\pi^2 - 8} \\ c_3 = -\dfrac{p(\operatorname{sen}^2 x, f_3)}{p(f_3, f_3)} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f_4(x) = \operatorname{sen}^2 x - \frac{2\pi}{\pi^2 - 8}\sin x - \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2 - 8}$$

7.– *Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar ordinario. Encontrar la matriz F, en la base canónica, de un endomorfismo simétrico f de $\mathbb{R}^3$, sabiendo que el núcleo de f es el subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$ y 3 es autovalor doble de f.*

Sabemos que los autovalores de f son el 0 y el 3 con multiplicidades 1 y 2 respectivamente. Como los subespacios característicos son ortogonales entre si, el subespacio característico relativo al autovalor 3 es precisamente el ortogonal a $S_0 = \mathcal{L}\{(1,1,1)\}$:

$$S_3 = S_0^\perp = \{(x,y,z)/x + y + z = 0\} = \mathcal{L}\{(1,-1,0), (1,0,-1)\}$$

Buscamos una base ortogonal de este subespacio. Tomamos $\bar{u}_1 = (1,-1,0)$ y

$$\bar{u}_2 = a\bar{u}_1 + (1,0,-1);$$

tal que $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0$. Obtenemos $a = -1/2$ y:

$$S_3 = \mathcal{L}\{(1,-1,0), (1/2, 1/2, -1)\}$$

Por tanto, la matriz de f en la base $\{(1,1,1), (1,-1,0), (1/2,1/2,-1)\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Haciendo el cambio de base obtenemos la matriz que buscamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Examen final, setiembre 2002)

8.– *Sea el espacio vectorial euclideo* $\mathbb{R}^3$*; se considera una forma bilineal* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *cuya matriz asociada en la base canónica es:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(i) *¿Para qué valores de* a *es* f *un producto escalar?.*

Para que sea un producto escalar la forma bilineal tiene que ser simétrica y definida positiva. Como la matriz asociada es simétrica, la correspondiente forma bilineal también lo es. Para ver que es definida positiva la diagonalizamos por congruencia:

$$F_C \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & a-1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}.$$

Para que sea definida positiva la signatura ha de ser $(3,0)$ es decir $a-3>0$.

Por tanto f es un producto escalar si y sólo si $a>3$.

(ii) *Calcular* a *para que los vectores* $(1,0,1)$ *y* $(0,3,-1)$ *sean ortogonales respecto al producto escalar definido por* f*.*

Tiene que cumpirse que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Operando queda:

$$6-a-1=0 \quad \Rightarrow \quad a=5.$$

(iii) *Para* $a=4$ *y con respecto al producto escalar que define* f *dar una base ortonormal y calcular el ángulo que forman los vectores* $(1,0,0)$ *y* $(0,1,0)$*.*

Una base ortonormal es aquella respecto a la cuál la matriz del producto escalar es la identidad. En el apartado (i) y con $a=4$ hemos llegado a la forma diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Completamos la congruencia hasta llegar a la identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_2(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de cambio de base de la base ortonormal a la canńonica es la matriz de paso por columnas de la congruencia que hemos realizado; para hallarla hacemos las mismas operaciones columna de ese proceso sobre la identidad:

$$Id \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2/\sqrt{2} & -3 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base ortonormal es:

$$\{(1,0,0), (-2/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-3,1,1)\}.$$

El ángulo entre $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ es:

$$arcos \frac{(1,0,0)\cdot(0,1,0)}{\|(1,0,0)\|\|(0,1,0)\|}$$

donde:

$$(1,0,0)\cdot(0,1,0) = (1,0,0)F_C(0,1,0)^t = 2.$$

y

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{(1,0,0)\cdot(1,0,0)} = \sqrt{(1,0,0)F_C(1,0,0)^t} = 1$$
$$\|(0,1,0)\| = \sqrt{(0,1,0)\cdot(0,1,0)} = \sqrt{(0,1,0)F_C(0,1,0)^t} = \sqrt{6}$$

El ángulo queda:

$$arcos\frac{2}{\sqrt{6}} = arcos\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

9.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, respecto de la base canónica, la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio:

$$U = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x = 0, \quad y + 2z = 0\}.$$

¿Cuál es la proyección ortogonal de $(1,1,1)$ *sobre el subespacio* U*?.*

Calculamos primero el generador de U (tiene dimensión 1 porque está definido en $\mathbb{R}^3$ por dos ecuaciones implícitas independientes). Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$x = 0, \quad y = -2z$$

obteniendo las paramétricas:

$$x = 0, \quad y = -2a, \quad z = a$$

de donde $U = \mathcal{L}\{(0,-2,1)\}$

Calculamos ahora una base de $U^\perp$; es decir calculamos los vectores (x,y,z) ortogonales a $(0,-2,1)$:

$$(x,y,z)\cdot(0,-2,1) = 0 \iff (\,x \quad y \quad z\,)\,G_C \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff z = 0.$$

Por tanto $U^\perp = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Formamos una base con los generadores de U y $U^\perp$:

$$B = \{\underbrace{(0,-2,1)}_{U}, \underbrace{(1,0,0),(0,1,0)}_{U^\perp}\}$$

En tal base la matriz de la proyección ortogonal sobre U es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente la cambiamos a la base canónica:

$$P_C = M_{CB}P_BM_{CB}^{-1}, \qquad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$P_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre el subespacio U es:

$$P_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.– *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una forma bilineal dada por:*

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(a) *Probar que* f *define un producto escalar en* $\mathbb{R}^3$.

Una aplicación bilineal en $\mathbb{R}^3$ es un producto escalar cuando es simétrica y definida positiva. En este caso es simétrica por que la matriz asociada

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

también lo es. Veamos que es definida positiva. Para ello calculamos su signatura diagonalizando por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{\overset{H_{21}(-1)}{\nu_{21}(-1)}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{\overset{H_{32}(1)}{\nu_{32}(1)}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura es $(+,+,+)$ y por tanto es definida positiva.

(b) *Sea* W *el subespacio vectorial generado por el vector* $(1,0,1)$*. Considerando el producto escalar definido por* f*, calcular una base ortonormal del subespacio* $W^\perp$.

Calculamos primero la ecuación implícita de $W^\perp$. Un vector (x,y,z) es perpendicular a $(1,0,1)$ si verifica:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = 0 \iff 2x + y + 2z = 0.$$

Calculemos una base ortogonal de este subespacio. Tomamos un vector $\bar{u}_1$ verificando la ecuación. Por ejemplo $\bar{u}_1 = (1,0,-1)$. Ahora calculamos un vector perpendicular a $\bar{u}_1$ y que esté en el subespacio anterior. Los vectores perpendiculares a $\bar{u}_1$ verifican:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = 0 \iff 2x + 3y - 2z = 0.$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

y obtenemos un vector $\bar{u}_2 = (-2,2,1)$.

Ahora el subespacio $W^\perp$ esta generado por la **base ortogonal**:

$$\{(1,0,-1),(-2,2,1)\}$$

La normalizamos para obtener una **base ortonormal**, es decir, dividimos estos vectores por su norma:

$$\begin{aligned} \|(1,0,-1)\|^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = 4. \\ \|(-2,2,1)\|^2 &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = 2. \end{aligned}$$

La base pedida será:

$$\{(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\}$$

(c) *Calcular la proyección ortogonal de* $(1,0,1)$ *sobre* $W^\perp$.

El vector $(1,0,1)$ es precisamente el generador de W por tanto su proyección ortogonal sobre $W^\perp$ es el vector nulo.

11.– *Sea el espacio vectorial euclideo* $\mathbb{R}^3$ *con un producto escalar* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se sabe que* $\|(2,3,1)\| = 3$. *Además los vectores* $\{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,0)\}$ *tienen la misma norma y forman una base ortogonal.*

(i) *Calcular la matriz de Gram respecto de la base canónica del producto escalar dado.*

Dado que la matriz dada es ortogonal, la matriz de Gram en esa base es diagonal. Además por definici´on de matriz de Gramm en una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ los elementos de la diagonal de la matriz son:

$$g_{ii} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = \|\vec{u}_i\|^2$$

es decir la norma de los vectores de la base al cuadrado. Dado que todos los vectores de la base indicada tienen la misma norma concluimos que:

$$G_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ahora usamos que $\|(2,3,1)\| = 3$. Primero lo expresamos en la base B:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{BC}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$9 = 3^2 = \|(2,3,1)\|^2 = \|(1,1,1)_B\|^2 = (\,1 \quad 1 \quad 1\,)\, G_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3a$$

de donde $a = 3$.

Finalmente hacemos un cambio de base a la base canónica:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = (M_{CB}^{-1})^t G_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Calcular el ángulo que forman los vectores* $(1,0,0)$ *y* $(0,0,1)$.

Se tiene que:

$$cos(ang((1,0,0),(0,0,1)) = \frac{(1,0,0)\cdot(0,0,1)}{\|(1,0,0)\|\|(0,0,1)\|}$$

donde:

$$(1,0,0)\cdot(0,0,1) = (\,1 \quad 0 \quad 0\,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3.$$

y

$$\|(1,0,0)\|^2 = (\,1 \quad 0 \quad 0\,)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6.$$

$$\|(0,0,1)\|^2 = (\,0 \quad 0 \quad 1\,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6.$$

y

$$cos(ang((1,0,0),(0,0,1)) = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad ang((1,0,0),(0,0,1)) = arcos(-1/2) = 3\pi/2.$$

(iii) *Dar una base ortonormal.*

La base dada en el enunciado es ortogonal. Basta dividir cada vector de la misma por su norma para que sea ortonormal. Por lo razonado en (1) la norma de sus vectores es $\sqrt{a} = \sqrt{3}$. La base ortonormal queda entonces:

$$\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (0, 1/\sqrt{3}, 0)\}$$

11.– *Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de un producto escalar, sabiendo que:*

- *Los vectores* $(1,0)$ *y* $(0,1)$ *forma un ángulo de* 60 *grados.*
- $\|(1,1)\| = \sqrt{3}$.
- $B = \{(1,0),(1,-2)\}$ *es una base ortogonal.*

Sabemos que la matriz de Gram de un producto escalar es simétrica:

$$G_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Por ser b una base ortogonal:

$$(1,0)\cdot(1,-2) = 0 \iff (\,1 \quad 0\,)\,G_C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \iff a - 2b = 0.$$

Dado que $\|(1,1)\| = \sqrt{3}$:

$$3 = \|(1,1)\|^2 = (1,1)\cdot(1,1) \iff 3 = (\,1 \quad 1\,)\,G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a + 2b + c = 3$$

De estas dos ecuaciones ya tenemos que:

$$a = 2b, \quad c = 3 - 4b \qquad \Rightarrow \qquad G_C = \begin{pmatrix} 2b & b \\ b & 3-4b \end{pmatrix}$$

Finalmente si los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ forma un ángulo de 60 grados:

$$(1,0)\cdot(1,0) = \|(1,0)\|\|(0,1)\|cos(60)$$

donde:

$$\|(1,0)\|^2 = (1,0)\cdot(1,0) = (\,1 \quad 0\,)\,G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2b$$

$$\|(0,1)\|^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (\,0 \quad 1\,)\,G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - 4b$$

$$(1,0)\cdot(0,1) = (\,1 \quad 0\,)\,G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

Nos queda:

$$b = \sqrt{2b(3-4b)}\cdot\frac{1}{2}$$

Quitando denominadores y elevando al cuadrado:

$$4b^2 = 6b - 8b^2 \iff 2b^2 = b$$

de donde $b = 0$ ó $b = 1/2$.

Si $b = 0$ entonces $G_C = 0$ y eso noes posible por ser la matriz de un producto escalar definida positiva.

Por tanto $b = 1/2$ y $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

I.– *En un espacio vectorial real V de dimensión 3 se considera una cierta base $B = \{\bar{e}_i\}$. Hallar, en esa base, la matriz métrica G de un producto escalar definido en V del que se sabe que:*

(a) El módulo de $\bar{e}_1$ es $\sqrt{2}$ y el de $\bar{e}_2$ es $\sqrt{3}$.

(b) El subespacio vectorial U, definido por la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ en la base B, es ortogonal a la envolvente de $\bar{e}_1$.

(c) La proyección ortogonal de $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ sobre la envolvente de $\bar{e}_2$ es $3\bar{e}_2$.

(d) El vector $\bar{e}_3$ es ortogonal a alguno del conjunto $C = \{(2,2,0), (2,0,-1), (0,2,-1)\}$, cuyos elementos vienen dados por sus coordenadas en la base B.

De la condición (a) obtenemos:

$$\|\bar{e}_1\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$
$$\|\bar{e}_2\| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 3$$

La condición (b) significa que:

$$\bar{x} \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \forall \bar{x} \in U$$

y teniendo en cuenta que una base de U está formada por los vectores $\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ y $\bar{e}_1 - \bar{e}_3$, obtenemos:

$$(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$
$$(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$

De estas dos condiciones deducimos que la matriz es de la forma:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$$

La condición (c) significa que:

$$((\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) - 3\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 \quad -2 \quad 1)\, G \,\{0 \quad 1 \quad 0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Finalmente utilizando la hipótesis (d) sabemos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\bar{e}_3 \cdot (2,2,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12 = 0 \text{ luego no puede ser.}$$
$$\bar{e}_3 \cdot (2,0,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$
$$\bar{e}_3 \cdot (0,2,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 8$$

Por tanto en principio, hay dos posibilidades para la matriz G:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ ó } G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, sabemos que la forma bilineal asociada ha de ser definida positiva (todos los autovalores de la matriz positivos). En particular el determinante ha de ser mayor que cero. Pero $|G_1| = -4$ y $|G_2| = 8$. Luego la matriz que buscamos es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 1998)

II.– *En un espacio vectorial V de dimensión n, se considera una forma bilineal f cuya matriz en una determinada base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es A^2, siendo A una matriz real $n \times n$, no singular y simétrica. Demostrar que f es un producto escalar. Encontrar, en función de $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, una base ortonormal para f.*

En primer lugar, como A es una matriz simétrica y no singular, entonces A^2 es simétrica y no singular, y por tanto define una forma bilineal simétrica. Si $\bar{v} = v_i\bar{e}_i$ y $\bar{w} = w_i\bar{e}_i$, entonces:

$$f(\bar{v}, \bar{w}) = (v_i)A^2\{w_i\}$$

Para ver que es un producto escalar hay que comprobar que es definida positiva. Sea $\bar{v} = v_i\bar{e}_i \in V$, $\bar{v} \neq \bar{0}$:

$$f(\bar{v}, \bar{v}) = (v_i)A^2\{v_i\} = (v_i)AA\{v_i\} = (v_i)A((v_i)A)^t$$

Como A es no singular y $\bar{v}$ es no nulo, $(v_i)A = (u_i)$ es un vector no nulo y por tanto:

$$f(\bar{v}, \bar{v}) = (u_i)(u_i)^t = \sum_{i=1}^{n}(u_i)^2 > 0$$

y vemos que f es definida positiva.

Para encontrar una base ortonormal, buscamos una matriz B de cambio de base de manera que, la matriz de Gram en dicha base sea la identidad. Es decir, si

$$(\bar{u}_i) = (\bar{e}_j)B$$

la matriz de Gram de f en la base $\{\bar{u}_i\}$ es:

$$B^tA^2B$$

Para que sea la identidad basta tomar $B = A^{-1}$, ya que entonces, como A es simétrica:

$$B^tA^2B = A^{-t}A^2A^{-1} = A^{-1}A^2A^{-1} = Id$$

Deducimos que una base otonormal es aquella cuyos vectores tienen por coordenadas en la base $\{\bar{e}_i\}$ las columnas de la matriz A^{-1}.

III.– *Sea un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita, y dos subespacios cualesquiera suyos U_1 y U_2. Comprobar que:*

(a) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$

Primero veamos que $(U_1 + U_2)^{\perp} \subset U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$:

$$\bar{v} \in (U_1 + U_2)^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{u} = 0 \quad \forall \bar{u} \in U_1 + U_2$$

Pero en particular cualquier $\bar{u}_1 \in U_1$ ó $\bar{u}_2 \in U_2$ está en $U_1 + U_2$, luego:

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{v} \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \forall \bar{u}_1 \in U_1 & \Rightarrow & v \in U_1^{\perp} \\ \bar{v} \cdot \bar{u}_2 = 0 \quad \forall \bar{u}_2 \in U_2 & \Rightarrow & v \in U_2^{\perp} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad v \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$

Ahora veamos que $U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subset (U_1 + U_2)^{\perp}$:

$$v \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} \bar{v} \in U_1^{\perp} & \Rightarrow & \bar{v} \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \forall \bar{u}_1 \in U_1 \\ \bar{v} \in U_2^{\perp} & \Rightarrow & \bar{v} \cdot \bar{u}_2 = 0 \quad \forall \bar{u}_2 \in U_2 \end{array}\right.$$

Dado cualquier $\bar{u} \in U_1 + U_2$ es de la forma $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ con $\bar{u}_1 \in U_1$ y $\bar{u}_2 \in U_2$. Luego:

$$\bar{v} \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \bar{v}.\bar{u}_1 + \bar{v}.\bar{u}_2 = 0$$

y por tanto $\bar{v} \in (U_1 + U_2)^{\perp}$.

(b) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$

Utilizando el apartado anterior y que $(U^{\perp})^{\perp} = U$ obtenemos:

$$(U_1 \cap U_2)^{\perp} = ((U_1^{\perp})^{\perp} \cap (U_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = ((U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$$

IV.– *En* $\mathbb{R}^3$ *y con respecto a una determinada base* $\{\bar{e}_i\}$ *se definen el producto escalar*

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y - 2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1$$

y el endomorfismo f *que verifica:* $f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1,\ \ f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3,\ \ f(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_3$. *¿Es* f *un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar dado arriba? En caso afirmativo, dar una base ortonormal en la que la matriz de* f *sea diagonal.*

La matriz de Gram del producto escalar que nos dan respecto a la base $\{\bar{e}_i\}$ es:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz del endomorifsmo:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

f será simétrico si GF es una matriz simétrica. Y efectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

es simétrica.

Para hallar una base ortonormal, basta tomar una base ortonormal de cada subespacio característico de f. Primero calculamos los autovalores:

$$|F - \lambda I| = -\lambda(2-\lambda)^2$$

Son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$ con multiplicidades 1 y 2 respectivamente.

Ahora calculamos los espacios característicos:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 2x + 3y \\ 0 = -2y + 2z \end{cases}$$

luego, $S_0 = \mathcal{L}\{(3,-2,-2)\}$

Y para el otro autovalor:

$$(F - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff y = 0$$

luego, $S_2 = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

Ahora los ortonormalizamos utilizando la matriz G. En S_0 basta dividr el vector base por su norma.

$$\|(3,-2,-2)\| = \sqrt{(3,-2,2)G\{3,-2,2\}} = \sqrt{2}$$

En S_2 calculamos $\bar{u} = a(1,0,0) + (0,0,1)$ ortogonal a $(1,0,0)$:

$$a = -\frac{(1,0,0)G\{(0,0,1)\}}{(1,0,0)G\{(1,0,0)\}} = -1$$

luego $\bar{u} = (-1,0,1)$ y dividimos por las normas:

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{((1,0,0)G\{(1,0,0)\}} = \sqrt{2}$$
$$\|(-1,0,1)\| = \sqrt{(-1,0,1)G\{(-1,0,1)\}} = 1$$

La base que buscamos es:

$$\{(3/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 0, 0), (-1,0,1)\}$$

V.– *En un espacio euclídeo V se tienen dos subespacios suplementarios V_1 y V_2. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2 sea simétrica es que V_1 y V_2 sean ortogonales.*

Sea $f : V \longrightarrow V_1$ la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2. Sabemos que:

$$f(v) = v_1, \qquad \text{siendo } v = v_1 + v_2 \text{ con } v_1 \in V_1 \text{ y } v_2 \in V_2.$$

Por otra parte que f sea simétrica significa que:

$$u \cdot f(v) = f(u) \cdot v; \qquad \forall u, v \in V$$

- Supongamos que V_1 y V_2 son ortogonales. Entonces sean $u, v \in V$ cualesquiera. Se descomponen como $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$ con $u_1, v_1 \in V_1$ y $u_2, v_2 \in V_2$. Entonces:

$$u \cdot f(v) = (u_1 + u_2) \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1$$

ya que $v_1 \cdot u_2 = 0$ por ser V_1 y V_2 ortogonales.

De igual forma:

$$f(u) \cdot v = u_1 \cdot (v_1 + v_2) = u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot v_2 = u_1 \cdot v_1 = u \cdot f(v)$$

y por tanto f es simétrico.

- Recíprocamente supongamos que f es simétrico y veamos que entonces V_1 y V_2 son ortogonales. Sean $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ cualesquiera. Por ser f simétrico:

$$v_1 \cdot f(v_2) = f(v_1) \cdot v_2$$

Pero esto es equivalente a:

$$v_1 \cdot 0 = v_1 \cdot v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 \cdot v_2 = 0$$

y tenemos la ortogonalidad de v_1 y v_2.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VI.– *Dada la matriz $n \times n$ A definida por*

$$a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

¿es diagonalizable por semejanza ortogonal? En caso de que lo sea, dar una matriz de paso.

A es una matriz simétrica y por tanto se puede interpretar como la matriz asociada a un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$. Sabemos que entonces existe una base ortonormal en la que la matriz de f es diagonal. Deducimos que A es diagonalizable por semejanza ortogonal (existe C ortogonal, $C^{-1} = C^t$ tal que C^tAC es diagonal).

Para calcular la matriz de paso, basta calcular una base ortonormal de autovectores de cada subespacio característico. Primero calculamos los autovalores:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-\lambda & n-\lambda & n-\lambda & \dots & n-\lambda & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{n-1}(n-\lambda)$$

Por tanto tenemos el autovalor $\lambda_1 = n$ con mulptiplicidad 1 y el autovalor $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad $n-1$. El espacio característico asociado al autovalor 0 tiene dimensión $n-1$ y esta dado por la ecuación:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

Una base ortogonal del mismo es:

$$\{(1,-1,0,\ldots,0,0),(1,1,-2,\ldots,0,0),\ldots,(1,1,1,\ldots,2-n,0),(1,1,1,\ldots,1,1-n)\}$$

El subespacio característico asociado al autovalor n es precisamente el ortogonal al anterior, es decir, el generado por el vector $\{(1,1,1,\ldots,1,1)\}$.

Divididiendo estos vectores por sus normas obtenemos las filas de la matriz de paso ortogonal que buscamos:

$$\begin{aligned} \|(1,1,1,\ldots,1,1)\| &= \sqrt{n} \\ \|(1,-1,0,\ldots,0,0)\| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \|(1,1,-2,\ldots,0,0)\| &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \\ &\vdots \\ \|(1,1,1,\ldots,2-n,0)\| &= \sqrt{n-2+(2-n)^2} = \sqrt{n^2-3n+2} \\ \|(1,1,1,\ldots,1,1-n)\| &= \sqrt{n-1+(1-n)^2} = \sqrt{n^2-n} \end{aligned}$$

y por tanto la matriz C es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & \frac{2-n}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1-n}{\sqrt{n^2-n}} \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

VII.– *En un espacio euclídeo V se consideran los vectores fijos y no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y la aplicación $f(\bar{x}) = (\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}$. Se pide:*

(a) *Ver si f es lineal.*

Veamos que es lineal. Sean $\bar{x},\bar{y}\in V$ y $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Hay que comprobar que $f(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}) = \lambda f(\bar{x})+\mu f(\bar{y})$:

$$\begin{aligned} f(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}) &= (\bar{a}\cdot(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}))\bar{b} - 3(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}) = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b}+\mu(\bar{a}\cdot\bar{y})\bar{b}-3\lambda\bar{x}-3\mu\bar{y} = \\ &= \lambda((\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b}-3\bar{x})+\mu((\bar{a}\cdot\bar{y})\bar{b}-3\bar{y}) = \lambda f(\bar{x})+\mu f(\bar{y}) \end{aligned}$$

(b) *Determinar los autovalores y autovectores.*

Sea λ un autovalor y $\bar{v}$ un autovector asociado no nulo. Se tiene:

$$\lambda\bar{v} = f(\bar{v}) = (\bar{a}\cdot\bar{v})\bar{b} - 3\bar{v} \quad\Rightarrow\quad (\bar{a}\cdot\bar{v})\bar{b} = (\lambda+3)\bar{v}$$

Por tanto hay dos posibilidades:

- $\lambda = -3$ y $\bar{a}\cdot\bar{v} = 0$, es decir, $\bar{v}\in\{\bar{a}\}^{\perp}$, o bien,

- $\bar{v} = \bar{b}$ y $\lambda+3 = \bar{a}\cdot\bar{b}$.

Es decir si $dim(V) = n$, el autovalor $\lambda_1 = -3$ tiene multiplicidad geométrica $dim(\{\bar{a}\}^{\perp}) = n-1$, ya que el subespacio caracerístico es precisamente $S_{-3} = \{\bar{a}\}^{\perp}$.

Además si $\bar{a}\cdot\bar{b}\neq 0$ aparece otro autovalor $\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b}-3$ distinto, cuyo subespacio caracerístico es precisamente $S_{\lambda_2} = \mathcal{L}\{\bar{b}\}$.

(c) *¿Qué condición han de cumplir $\bar{a}$ y $\bar{b}$ para que f sea diagonalizable?*

Para que sea diagonalizable, la suma de las multiplicidades geométricas han de ser la dimensión de V. Por lo razonado en el apartado anterior, esto ocurre precisamente si $\bar{a}\cdot\bar{b}\neq 0$ ese decir si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no son ortogonales.

(d) *Si en la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$ la matriz de Gram es*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas covariantes de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son $(1,2,-1)$ *y* $(2,0,-3)$, *respectivamente, determinar en dicha base la matriz de f, los autovalores y los autovectores.*

Los autovalores son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b}-3$. Para calcular este producto, basta calcular las coordenadas contravariantes de $\bar{b}$:

$$G^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b}-3 = (\,1\quad 2\quad -1\,)\,\{\,3\quad 1\quad -1\,\} - 3 = 3$$

Los autovectores asociados son:

$$\begin{aligned} S_{-3} &= \{\bar{a}\}^{\perp} = \{x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3 |\, x_1+2x_2-x_3 = 0\} = \mathcal{L}\{\bar{e}_1+\bar{e}_3, \bar{e}_2+2\bar{e}_3\} \\ S_3 &= \mathcal{L}\{\bar{b}\} = \mathcal{L}\{3\bar{e}_1+\bar{e}_2-\bar{e}_3\} \end{aligned}$$

Por último la imagen de un vector (x,y,z) es:

$$f(x,y,z) = ((x,y,z)\cdot\bar{a})\bar{b} - (3x,3y,3z) = (-2x+6y-3z, x-3y-z, -x-2y-2z)$$

La matriz asociada queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 1997)

VIII.– *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ *una forma bilineal cuya matriz en la base canónica es*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $S \subset \mathbb{R}^3$ *el subespacio generado por* $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,0)\}$.

(a) *Probar que la forma bilineal* f *define un producto escalar.*

Para que f defina una forma bilineal su matriz asociada ha de ser simétrica y definida positiva.

La simetría se cumple por ser la matriz A simétrica.

La diagonalizamos por congruencia para comprobar que es definida positiva:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1/2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{21}(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(2/3)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{32}(2/3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura es $(+,+,+)$ y por tanto f es definida positiva.

(b) *Obtener una base ortogonal de* S *respecto del producto escalar* f.

En primer lugar vemos si los vectores que generan S son independientes. Para ello obtenemos un sistema de generadores equivalente haciendo operaciones fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $S = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Para obtener una base ortogonal de S podemos utilizar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Tomamos como primer vector $\bar{v}_1 = (1,0,0)$.

Ahora buscamos otro vector de S de la forma:

$$\bar{v}_2 = (0,1,0) + \lambda \bar{v}_1$$

tal que

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,1,0)\cdot \bar{v}_1 + \lambda \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{(0,1,0)\cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}$$

Tenemos en cuenta que para hacer el producto escalar tenemos que utilizar la matriz A de f:

$$\lambda = -\frac{(0,1,0)A(1,0,0)^t}{(1,0,0)A(1,0,0)^t} = \frac{1}{2}$$

Por tanto la base pedida es:

$$\{(1,0,0),(\frac{1}{2},1,0)\}$$

IX.– *Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "El conjunto formado por dos vectores no nulos y ortogonales entre sí es un sistema libre".*

Es VERDADERO. Sean v, w tales vectores. Si fueran dependientes, como $w \neq 0$, existiría un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $w = \lambda v$. Pero entonces, por ser ortogonales,

$$0 = v \cdot w = \lambda |v|^2,$$

de donde se derivaría que $v = 0$, lo que es una contradicción con la hipótesis. Así pues, son linealmente independientes y constituyen un sistema libre.

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

X.– *Consideramos los productos escalares en $\mathbb{R}^2$ cuyas matrices de Gram respecto de la base canónica son G_1 y G_2. Sabiendo que $G_1 = \lambda G_2$ con $\lambda \in R$, $\lambda > 1$, probar que los dos productos escalares definen la misma medida sobre ángulos de vectores, pero distinta en longitudes.*

Sean u, v dos vectores no nulos. La medida del ángulo que forma se hace mediante la fórmula:

$$cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

Apliquémosla para cada uno de los productos escalares. Para G_1:

$$cos(u, v) = \frac{(u)G_1(v)^t}{\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|}.$$

Para G_2:

$$\begin{aligned} cos(u, v) &= \frac{(u)G_2(v)^t}{\|(u)G_2(u)^t\|\|(v)G_2(v)^t\|} = \frac{(u)(\lambda G_1)(v)^t}{\|(u)(\lambda G_1)(u)^t\|\|(v)(\lambda G_1)(v)^t\|} = \\ &= \frac{\lambda (u)G_1(v)^t}{\lambda \|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|} = \frac{(u)G_1(v)^t}{\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|} \end{aligned}$$

Luego vemos que ambos conínciden.

En cuanto a las longitudes:

$$\|u\|_1 = \sqrt{(u)G_1(u)^t},$$

pero

$$\|u\|_2 = \sqrt{(u)G_2(u)^t} = \sqrt{(u)(\lambda G_1)(u)^t} = \lambda \sqrt{(u)G_1(u)^t} = \lambda \|u\|_1.$$

Como $\lambda > 1$ vemos que la longitud con el segundo producto escalar es superior a la primera.

(Examen final, septiembre 2008)

XI.– *En el espacio de matrices $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ consideramos las formas bilineales:*

$$\begin{aligned} f &: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(A, B) = traza(AB^t) \\ g &: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(A, B) = traza(AB) \end{aligned}$$

(a) *Estudiar si son simétricas.*

Dadas $A, B, \in M_{n\times n}$ veamos la simetría de f:

$$f(A, B) = traza(AB^t) = traza((AB^t)^t) = traza(BA^t) = f(B, A),$$

donde hemos usado que la traza de una matriz coincide con su traspuesta.

Ahora la simetría de g:

$$g(A, B) = traza(AB) = traza(BA) = g(B, A),$$

donde usamos que la traza de AB es la misma que la traza de BA:

$$traza(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki}$$
$$traza(BA) = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{ki}A_{ik}$$

(b) *Probar que para $n \geq 2$, f define un producto escalar, pero g no. ¿Qué ocurre para $n = 1$?.*

Necesitamos ver que f es definida positiva, es decir, que $f(A, A) > 0$ si $A \neq \Omega$. Pero:

$$f(A, A) = traza(A \cdot A^t) = \sum_{i=1}^{n}(AA^t)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(A^t)_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2$$

Como la suma es de cuadrados, es mayor que cero si alguno de los coeficientes A_{ik} es no nulo.

Sin embargo para la aplicación g si tomamos la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

se cumple $B \neq 0$:

$$g(B, B) = traza(B^2) = traza(\Omega) = 0$$

luego B no es definida positiva.

Si $n = 1$ entonces las aplicaciones f y g son en realidad la misma, porque una matriz de dimensión uno coincide con su traspuesta. Por tanto ambas son productos escalares.

(c) *Para $n = 2$ calcular la matriz asociada a g respecto de la base canónica, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada.*

Si llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad B = A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$g(A, B) = traza(AB) = traza \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_3 & x_1y_2 + x_2y_4 \\ x_3y_1 + x_4y_3 & x_3y_2 + x_4y_4 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_4$$

de donde la matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la signatura la diagonalizamos por congruencia:

$$G \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la signatura es $(3, 1)$ y la forma cuadrática asociada a g es no degenerada e indefinida.

(d) *Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f, calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio de matrices simétricas.*

Consideramoas la base del subespacio de matrices simétrias:

$$\left\{ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lo completamos hasta una base ortogonal de la misma. Buscamos matrices $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ tales que:

$$f(X, S_1) = f(X, S_2) = f(X, S_3) = 0.$$

Operando:

$$\begin{array}{rcc} f(X, S_1) = 0 & \iff & x_1 = 0 \\ f(X, S_2) = 0 & \iff & x_2 + x_3 = 0 \\ f(X, S_3) = 0 & \iff & x_4 = 0 \end{array}$$

Por tanto podemos tomar:

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la base $B = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ la matriz de la proyección ortogonal es:

$$P_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$P_{CC} = M_{CB} P_{BB} M_{BC} = M_{CB} P_{BB} M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$P_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) *Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f, hallar una base ortonormal del subespacio generado por las matrices:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comprobamos si los tres vectores son independientes. Para ello analizamos el rango de la matriz de sus coordenadas respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ttiene rango 2. Por tanto una base de ese subespacio está formada por dos vectores.

Ahora aplicamos GramSchmidt a los vectores:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tomamos:

$$V_1 = U_1, \quad V_2 = \lambda V_1 + U_2,$$

con

$$f(V_1, V_2) = 0 \iff \lambda = -\frac{f(U_2, U_1)}{f(U_1, U_1)} = -\frac{traza(U_2 U_1^t)}{traza(U_1 U_1^t)} = -\frac{-2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Por tanto:

$$V_2 = \frac{2}{5} U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 \\ 1 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Finalmente normalizamos los vectores dividiéndolos por su norma:

$$\|V_1\|^2 = f(V_1, V_1) = traza(V_1 V_1^t) = 5, \qquad \|V_2\|^2 = f(V_2, V_2) = traza(V_2 V_2^t) = \frac{1}{5}$$

La base pedida es:

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad W_2 = \frac{1}{1/\sqrt{5}} V_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 & 0 \\ \sqrt{5} & -\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}.$$

(f) *Para cualquier $n > 2$, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada a g.*

Observamos que sobre las matrices simétricas f y g actúan igual ya que si B es simétrica $traza(AB) = traza(AB^t)$. Por tanto, la restricción de g al subespcio de matrices simétricas es definida positiva, porque coincide con f. Así el número de signos positivos de la signatra es mayor o igual que la dimensión p del espacio de matrices simétricas, donde:

$$p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Además sabemos que matrices simétricas y hemisimétricas son espacios suplementarios. Si nos restringimos a las matrices hemisimétricas, se cumple que dada A hemisimétrica no nula:

$$g(A, A) = traza(A \cdot A) = traza(-A \cdot A^t) = -f(A, A) < 0,$$

luego esa restricción es definida negativa. Por tanto el número de signos negativos de la signatura es mayor o igual que la dimensión q el espacio de matrices hemisimétricas, donde:

$$q = n^2 - p = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Deducimos que la signatura es (p', q') con $p' \geq p$ y $q' \geq q$ pero como:

$$n^2 \geq p' + q' \geq p + q \geq n^2$$

en realidad son igualdades y la signatura es:

$$(p', q') = (p, q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right).$$