Álgebra Lineal II

TEMA IV- Cónicas y cuádricas.

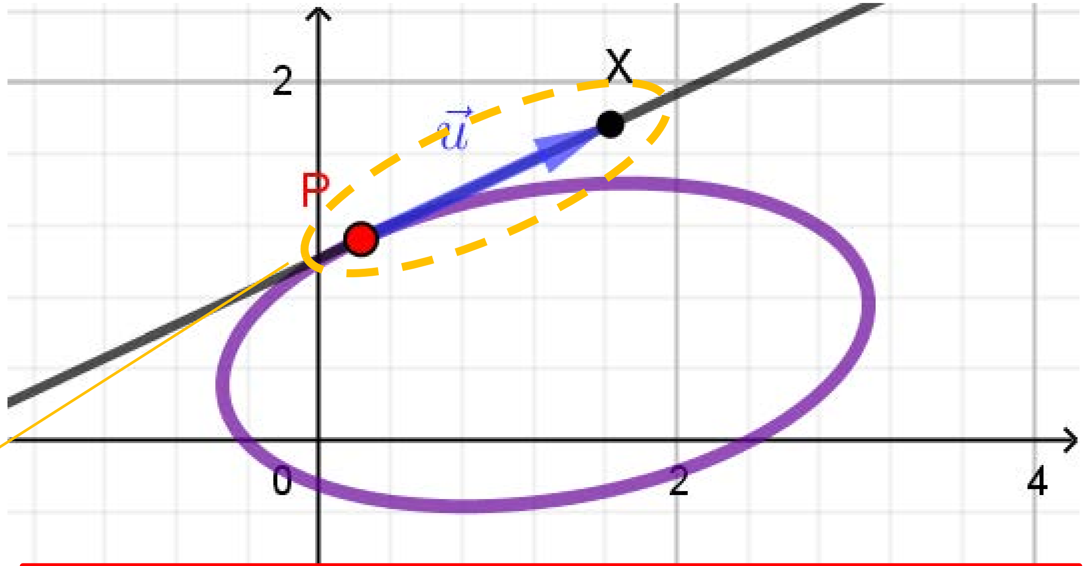
Capítulo 1. Cónicas.

Recta tangente y recta polar.

Luis Fuentes García (2022).

Recta tangente a una cónica por un punto de la misma.

Cónica: $(x \quad y \quad 1)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$ **Punto de la cónica:** $P=(a,b)$



Buscamos la **Tangente a la cónica por P:**

$$\underset{X}{(x,y)}=\underset{P}{(a,b)}+t\underset{\vec{u}}{(p,q)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}p\\q\\0\end{pmatrix}$$

Notación abreviada:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix},\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}p\\q\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\text{Cónica:} & X^tAX=0\\ \text{Recta:} & X=P+t\vec{u}\\ P\in\text{Cónica}\Leftrightarrow P^tAP=0\end{cases}$$

Condición de tangencia: Cónica ∩ Recta = $\boxed{1\ punto\ doble}$

$$\alpha t^2+\beta t+\gamma=0,\quad t=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad \boxed{\beta^2=4\alpha\gamma}$$

Raíz doble $\Leftrightarrow$ $\beta^2-4\alpha\gamma=0$

$$\left.\begin{array}{l}X^tAX=0\\X=P+t\vec{u}\end{array}\right\}\Rightarrow (P^t+t\,\vec{u}^t)A(P+t\vec{u})=0 \;\Rightarrow\; t^2\underbrace{\vec{u}^tA\vec{u}}_{\alpha}+2t\underbrace{P^tA\vec{u}}_{\beta}+\underbrace{P^tAP}_{\gamma}=0 \;\Rightarrow\; 4(P^tA\vec{u})^2=4(\vec{u}^tA\vec{u})\underbrace{(P^tAP)}_{=0}$$

$$\boxed{P^tA\vec{u}=0} \quad \boxed{\begin{array}{c}X\in tangente\\ \Downarrow\\ \vec{u}=X-P\end{array}}$$

$$P^tA(X-P)=0$$
$$\Downarrow$$
$$P^tAX-\underbrace{P^tAP}_{=0}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{P^tAX=0}\;\Rightarrow$$

Tangente por $P=(a,b)\in$ Cónica

$$(a \quad b \quad 1)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$$

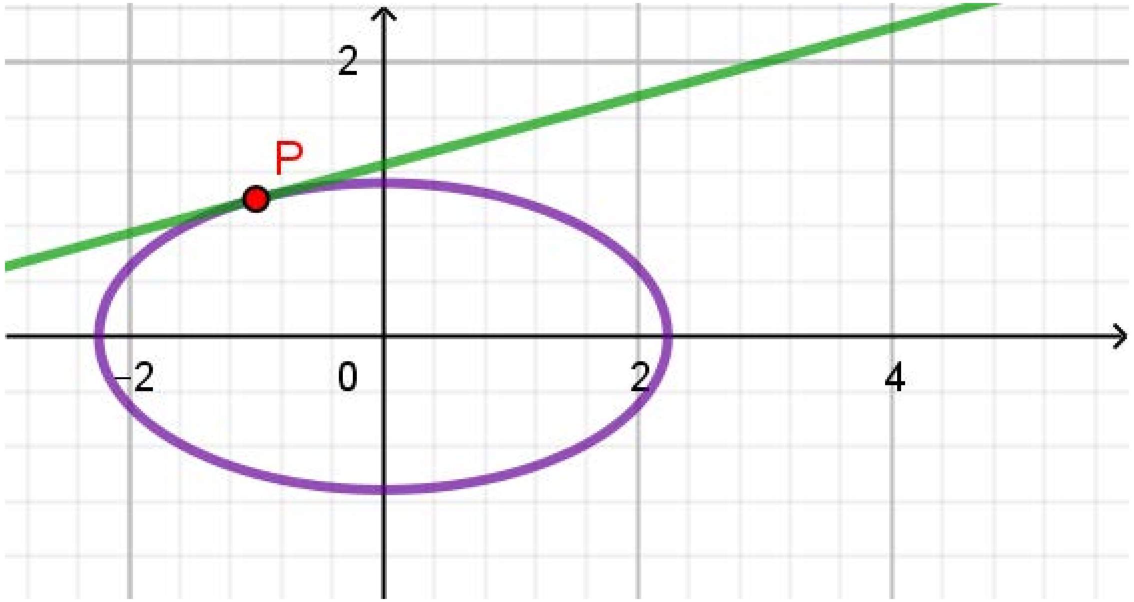
Ejemplo de recta tangente a una cónica por un punto de la misma.

Dada la **elipse** $x^2+4y^2-5=0$ hallar la ecuación de la **recta tangente a la cónica** en el **punto** $P=(-1,1)$.

El punto $P=(-1,1)$ $\in$**cónica** porque cumple su **ecuación**:

$$(-1)^2+4(1)^2-5=$$

Tangente por $P=(a,b)\in$ **Cónica**
$\begin{pmatrix}a & b & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$



Matriz asociada A de la **cónica**:

$x^2+4y^2-5=0$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

Tangente a cónica por $P=(-1,1)$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad -x+4y-5=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x-4y+5=0}$$

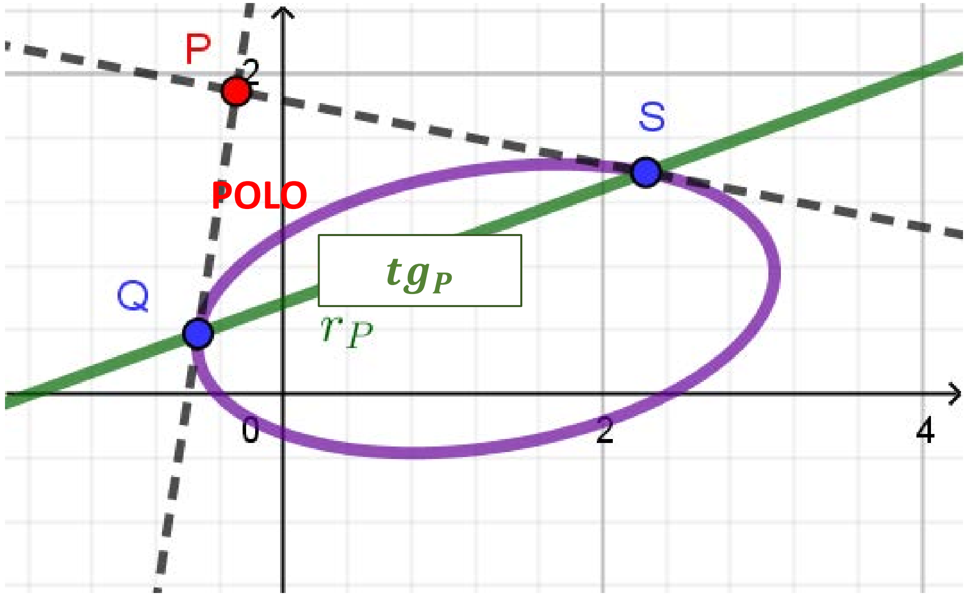
Recta polar de un punto respeto de una cónica.

Cónica: $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Punto de la cónica: $P = (a, b)$

Tangente por $P = (a, b) \in$ Cónica

$tg_P \equiv \begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$



Punto cualquiera: $P = (a, b)$

r_P recta polar de P

P polo de la recta r_P

Recta polar por $P = (a, b)$

$r_P \equiv \begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Si $P \in$ cónica, la recta polar = recta tangente a la cónica por el punto P.

Si $P \notin$ cónica, ¿qué significa la recta polar?

Notación abreviada: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$,

Cónica: $X^t A X = 0$

Recta polar: $P^t A X = 0$

Recta polar ∩ cónica = Q, S

$Q, S \in$ cónica $\begin{cases} \text{Tg a cónica por } Q \equiv Q^t A X = 0 \\ \text{Tg a cónica por } S \equiv S^t A X = 0 \end{cases}$

$Q, S \in r_P$ $\begin{cases} P^t A Q = 0 \Rightarrow Q^t A^t P = 0 \Rightarrow Q^t A P = 0 \\ P^t A S = 0 \Rightarrow S^t A^t P = 0 \Rightarrow S^t A P = 0 \end{cases}$ $P \in \begin{cases} \text{Tg a cónica por } Q. \\ \text{Tg a cónica por } S. \end{cases}$

Trasponiendo

A es simétrica: $A^t = A$

Si $P \notin$ cónica la recta polar corta a la cónica en los ***puntos de tangencias de las tangentes exteriores*** a la cónica por P

Ejemplo de tangentes a una cónica por un punto exterior a ella.

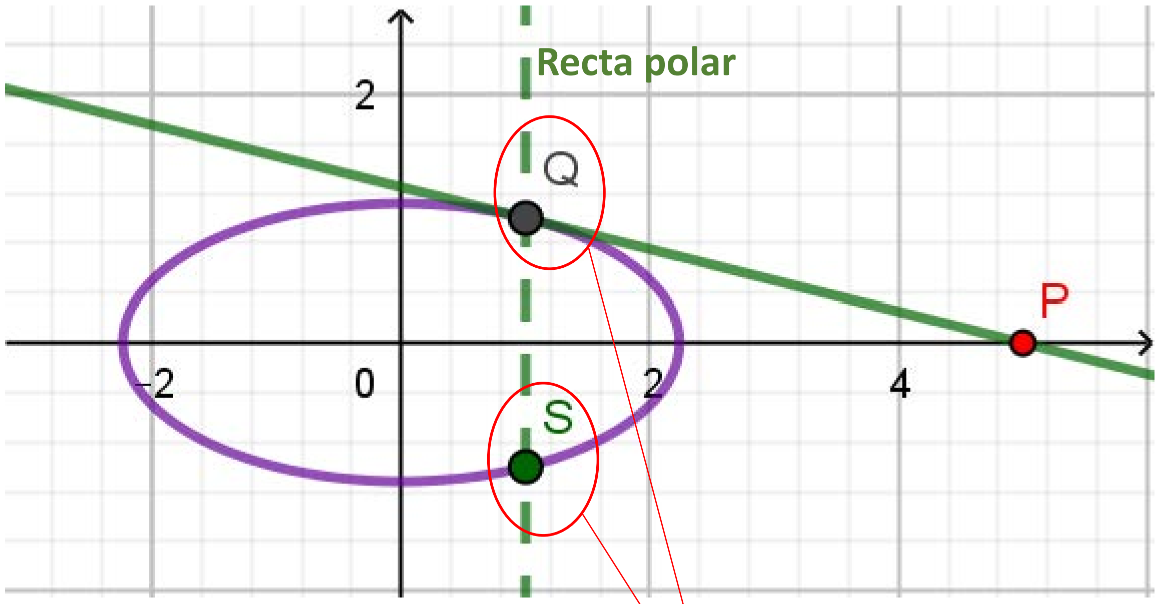
Dada la **elipse** $x^2 + 4y^2 - 5 = 0$ hallar la ecuación de las <u>rectas tangente **a la** cónica</u> que pasan por el **punto** $P = (5, 0)$.

El punto $P = (5, 0) \notin$**cónica** porque **NO** cumple su **ecuación**:

$$(5)^2 + 4(0)^2 - 5$$

Tangentes por un punto P exterior:

1) Se calcula la **recta polar** r_p.
2) Se interseca con la **cónica** : $r_p \cap$ **cónica** $= Q, S$
3) Las tangentes buscadas son las rectas PS y PQ



1) **Recta polar** por $P = (5, 0)$: $\quad (a \quad b \quad 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$(5 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \boxed{x - 1 = 0}$$

2) $r_p \cap$ **cónica** $\quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ 1^2 + 4y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} Q = (1, 1) \\ S = (1, -1) \end{matrix}}$

3) <u>**Rectas tangentes**</u>:

$$\begin{cases} P = (5, 0) \\ Q = (1, 1) \end{cases} \iff \frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{y - 1}{0 - 1} \iff \boxed{x + 4y - 5 = 0}$$

$$\begin{cases} P = (5, 0) \\ S = (1, -1) \end{cases} \iff \frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{y - (-1)}{0 - (-1)} \iff \boxed{x - 4y - 5 = 0}$$