Álgebra Lineal II

TEMA IV- Cónicas y cuádricas.

Capítulo 1. Cónicas.

Puntos y rectas notables de una cónica.

Luis Fuentes García (2022).

Centro una cónica.

Cónica: $\begin{pmatrix} x & y & 1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^t A X = 0$

$C = (a, b)$ **centro** = **Centro geométrico de simetría**

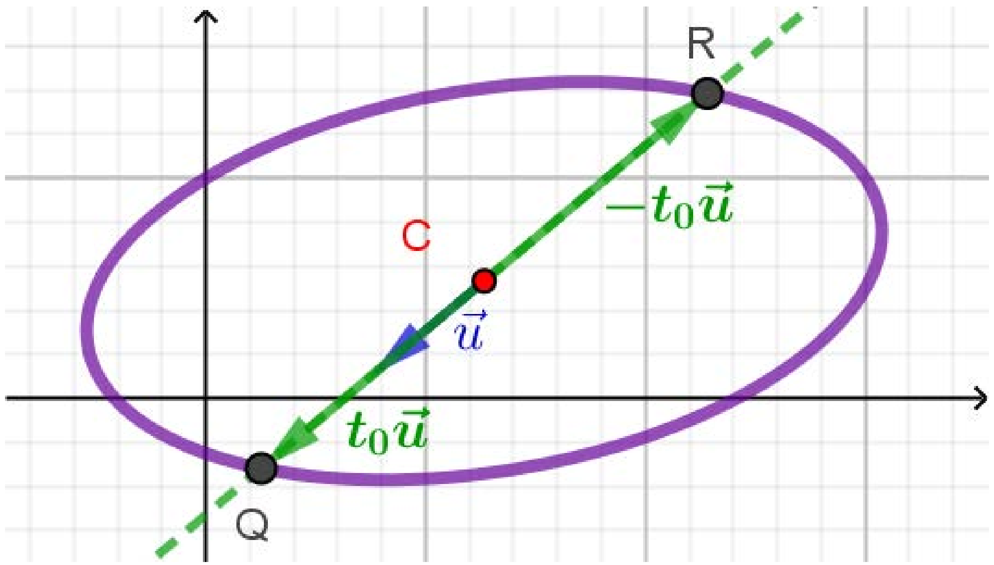
⇕

Toda recta por C **corta** a la cónica en **puntos simétricos**

⇕

Dado **cualquier** vector $\vec{u}$ y la recta por C : $X = C + t\vec{u}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{cónica} \equiv X^t A X = 0 \\ \text{recta} \equiv X = C + t\vec{u} \end{array}\right\} \text{se cortan en :} \begin{cases} R = C - t_0\vec{u} \\ Q = C + t_0\vec{u} \end{cases}$$



$$(C^t + t\,\vec{u}^t) A (C + t\vec{u}) = 0 \;\Rightarrow\; t^2 \underbrace{\vec{u}^t A \vec{u}}_{\alpha} + 2t \underbrace{\vec{u}^t A C}_{\beta = 0} + \underbrace{C^t A C}_{\gamma} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{u}^t A C = 0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} p & q & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1\end{pmatrix} = 0$$

cónica $\equiv X^t A X = 0$

$$\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0, \qquad t = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Raíces de signo opuesto

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ h\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p & q & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \\ h\end{pmatrix} = 0$$

Para **todo** (p, q)

En particular si: $(p, q) = (c, d)$

$c^2 + d^2 = 0$

⇑

$\boxed{c = d = 0}$

⇐

$C = (a, b)$ **centro**

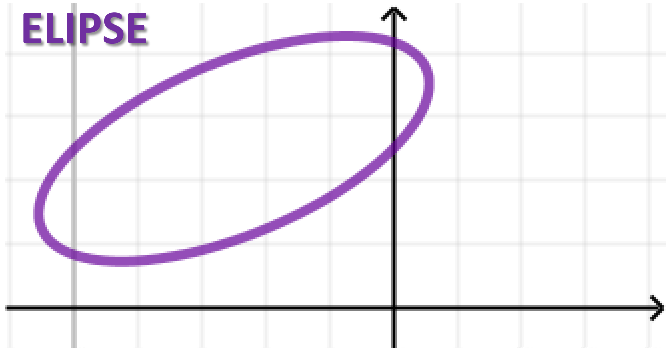
$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h\end{pmatrix}$$

h cualquier valor

Ejemplos de cálculo de centro.

$C=(a,b)$ centro $\quad A\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}\quad$ h cualquier valor

ELIPSE



$$x^2-2xy+3y^2+4x-8y+5=0$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&3&-4\\2&-4&5\end{pmatrix}$$

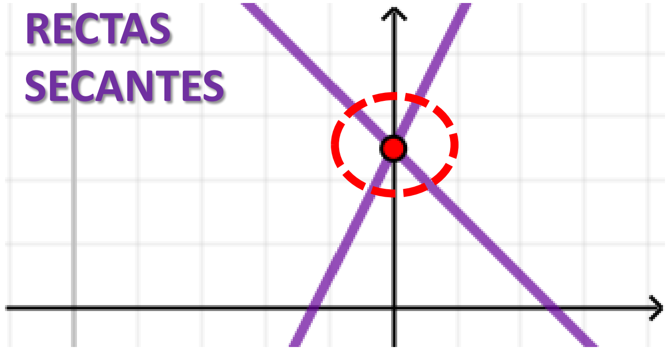
$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&3&-4\\2&-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}a-b+2=0\\-a+3b-4=0\\\cancel{2a-4b+5=h}\end{array}\right\}$$

Resolviendo:

$\boxed{\textbf{Centro: } (a,b)=(-1,1)}$

RECTAS SECANTES



$$2x^2+xy-y^2-x+2y-1=0$$

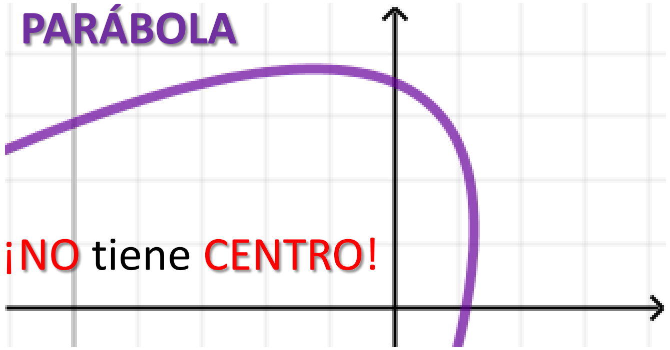
$$A=\begin{pmatrix}2&1/2&-1/2\\1/2&-1&1\\-1/2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1/2&-1/2\\1/2&-1&1\\\cancel{-1/2}&\cancel{1}&\cancel{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}2a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}=0\\\frac{1}{2}a-b+1=0\end{array}\right\}$$

Centro: $(a,b)=(0,1)$

PARÁBOLA



$$x^2-2xy+y^2+4x-2=0$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&0\\\cancel{2}&\cancel{0}&\cancel{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}a-b+2=0\\-a+b+0=0\end{array}\right\}$$

Sumando: $2=0$ **¡IMPOSIBLE!**

La parábola NO tiene centro.

Direcciones asintóticas de una cónica.

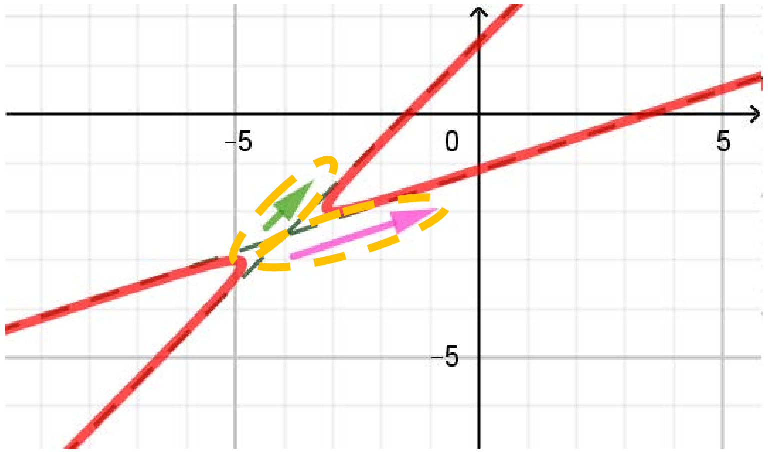
Dirección asintótica o **punto del infinto** de una **cónica** = **Dirección en la cual tiene una rama hacia el infinito**

Cónica:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

punto del infinito

(p, q) **dirección asintótica** $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} p & q & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = 0$



$$(p \quad q) T \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$$

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 = 0$$

dividiendo por q

$$a_{11}\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{p}{q}\right) + a_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

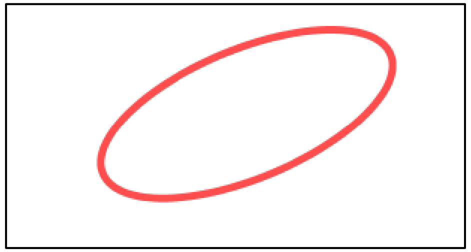
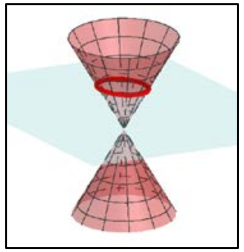
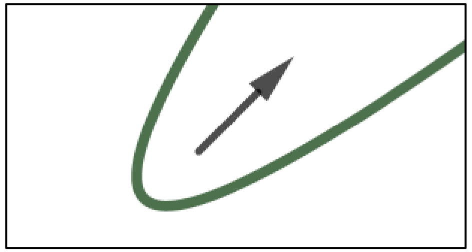
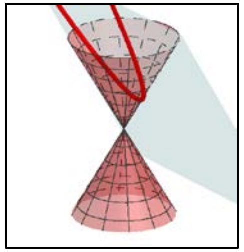
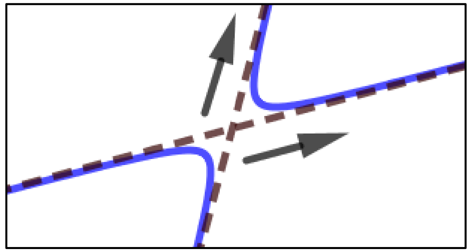
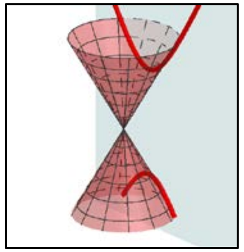
$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \begin{cases} < 0 \text{ no hay solución} \\ = 0 \text{ una solución} \\ > 0 \text{ dos soluciones} \end{cases}$$

$$\underbrace{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}_{-|T|}$$

$|T| > 0$ **no** hay direcciones asintóticas **ELÍPTICA**

$|T| = 0$ **una** dirección asintótica **PARABÓLICA**

$|T| < 0$ **dos** direcciones asintóticas **HIPERBÓLICA**

$\lvert T\rvert>0$ TIPO **ELÍPTICO**	$\lvert T\rvert=0$ TIPO **PARABÓLICO**	$\lvert T\rvert<0$ TIPO **HIPERBÓLICO**
 	 	 
NO hay **direcciones asintóticas**	**UNA dirección asintótica**	**DOS direcciones asintóticas**

Asíntotas de una cónica.

Asíntota = Recta cuya distancia a la curva <u>tiende a cero</u> cuando alguna <u>coordenada tiende a infinito</u>.

Asíntota = Tangente en un <u>punto del infinito</u> = Tangente en una <u>dirección asintótica</u>

Cónica:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Tangente por $P = (a, b) \in$ Cónica

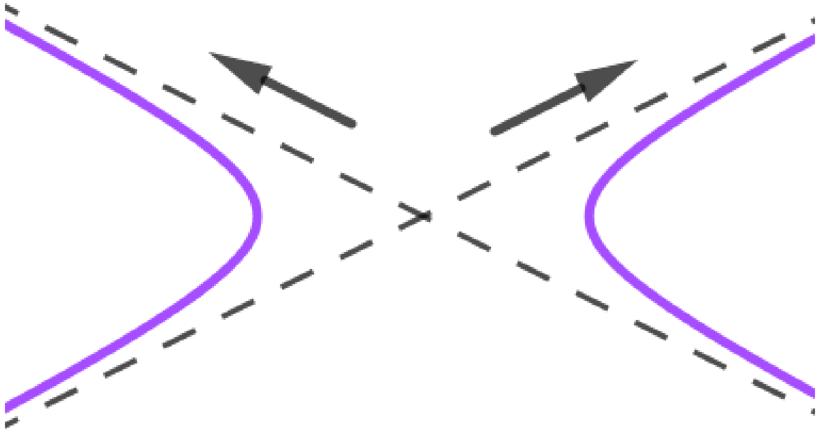
$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

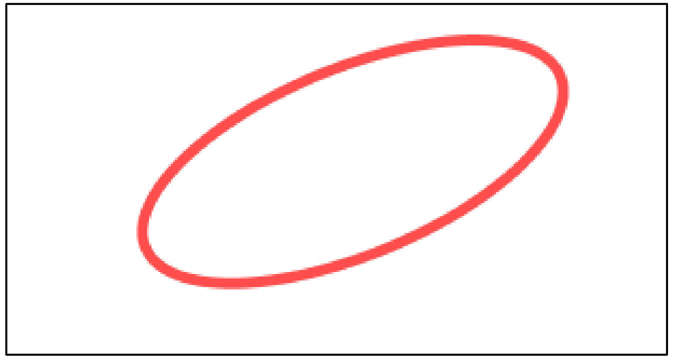
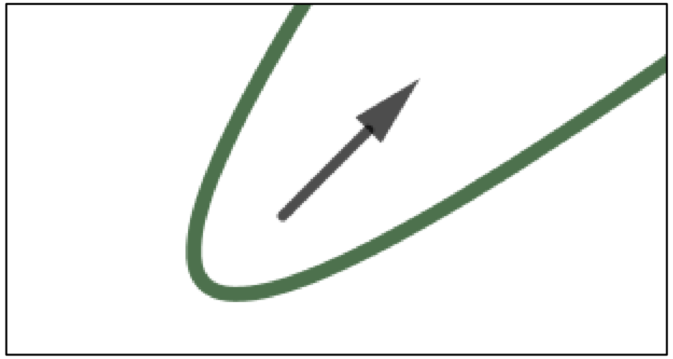
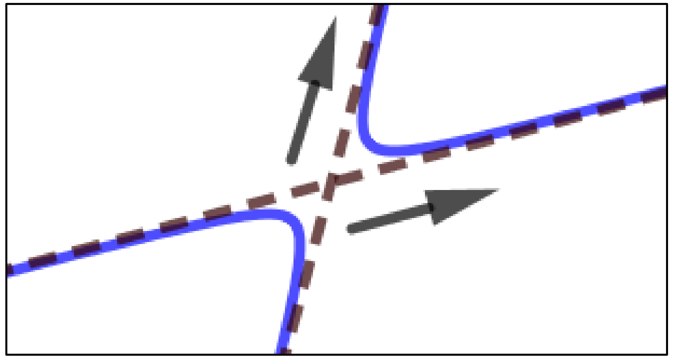
Asíntotas a la cónica

$$\begin{pmatrix} p & q & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(p, q) dirección asintótica

(p, q) solución de $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$

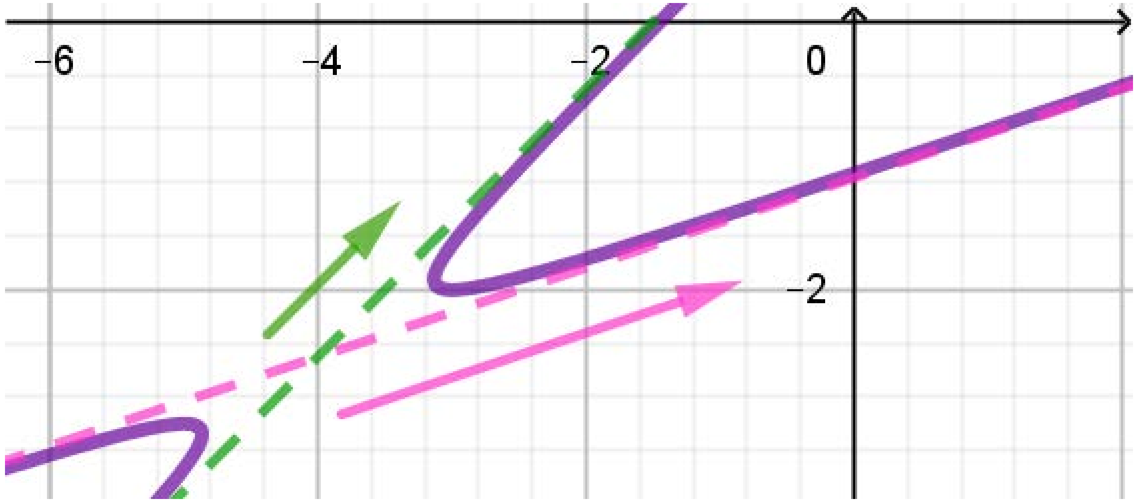


ELIPSE	**PARÁBOLA**	**HIPÉRBOLA**
		
NO hay **direcciones asintóticas** **NO** hay **asíntota**	**UNA dirección asintótica** **NO** hay **asíntota**	**DOS direcciones asintóticas** **DOS asíntotas**

Ejemplo I: Direcciones asintóticas y asíntotas de una hipérbola.

Cónica: $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - y - 5 = 0$ $\quad \div 2$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ -1/2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & -1/2 \end{matrix} & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$



Direcciones asintóticas (p, q)

$$(p \quad q)\,T\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p \quad q)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$$

$$p^2 - 4pq + 3q^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{4q \pm \sqrt{16q^2 - 12q^2}}{2} = \begin{cases} p = 3q \\ p = q \end{cases} \xrightarrow{q = 1} \boxed{\begin{matrix} (p, q) = (3, 1) \\ (p, q) = (1, 1) \end{matrix}}$$

Asíntotas a la cónica

$$(p \quad q \quad 0)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(p, q) dirección asintótica

Asíntota en la dirección $(3, 1)$

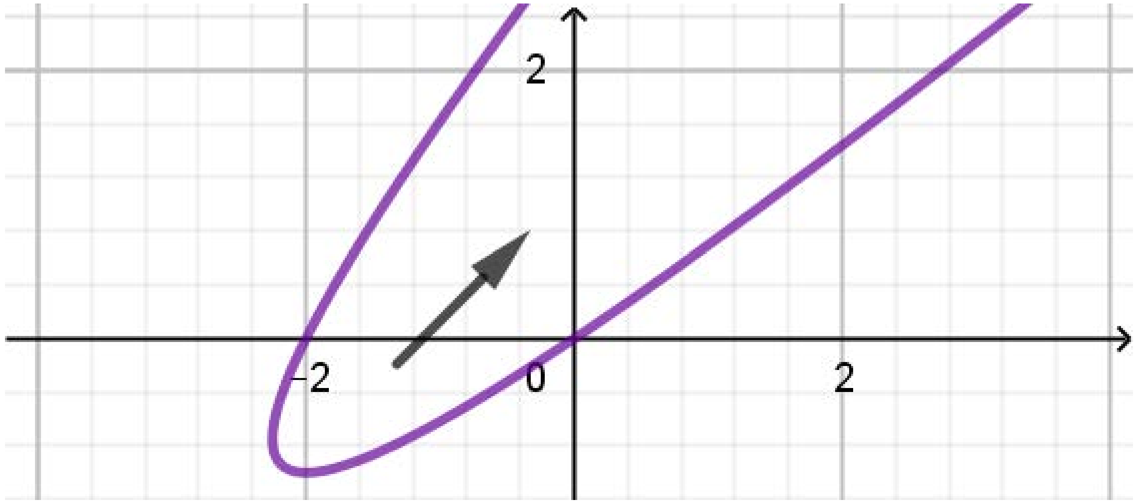
$$(3 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 3y - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x - 6y - 7 = 0}$$

Asíntota en la dirección $(1, 1)$

$$(1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x - 2y + 3 = 0}$$

Ejemplo II: Direcciones asintóticas y asíntotas de una parábola.

Cónica: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 3y = 0$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Direcciones asintóticas (p, q)

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$$

$$p^2 - 2pq + q^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 - 4q^2}}{2} \quad \xrightarrow{q = 1} \quad \boxed{(p, q) = (1, 1)}$$

Asíntotas a la cónica

$$\begin{pmatrix} p & q & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(p, q) dirección asintótica

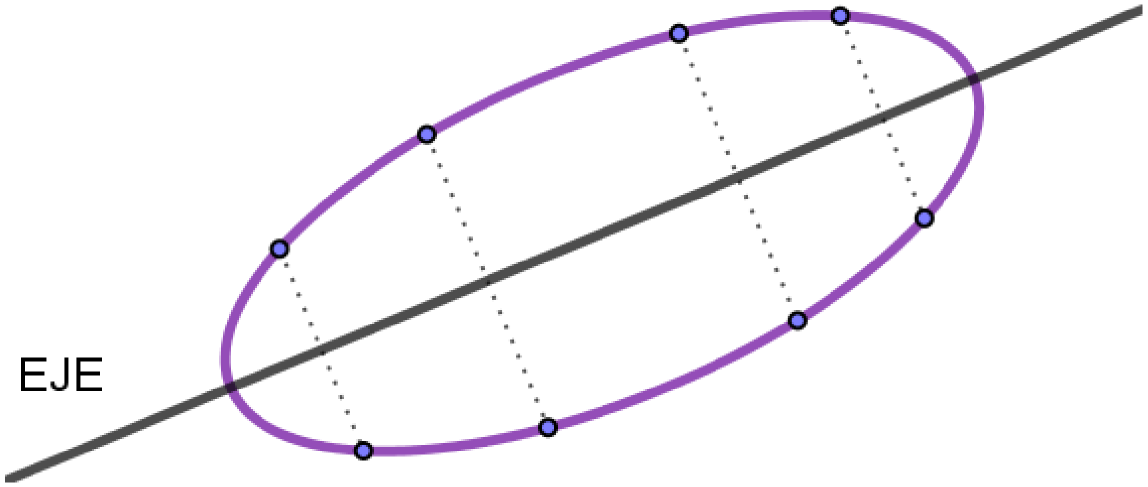
Asíntota en la dirección $(1, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot x + 0 \cdot y - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-1 = 0}$$

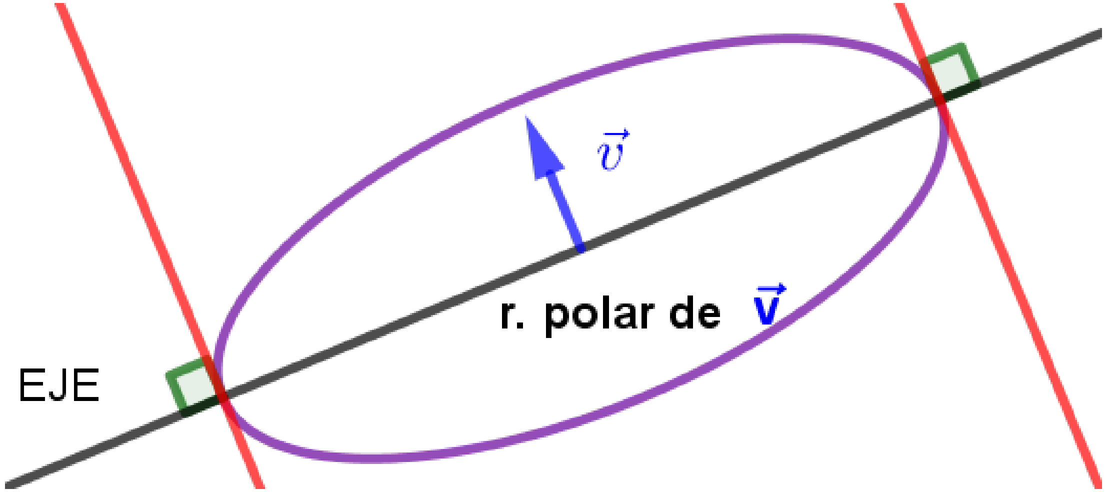
¡Imposible!.
¡NO hay asíntota!

Ejes de una cónica: de la definición geométrica a la algebraica (I).

EJE = Recta respecto a la cuál la cónica es <u>simétrica</u>

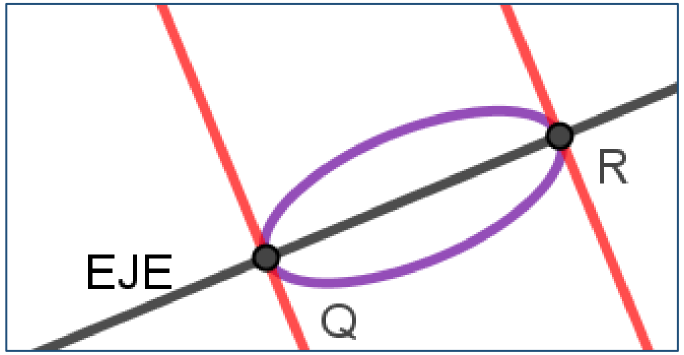


EJE = **recta polar** de una **dirección** perpendicular a él.

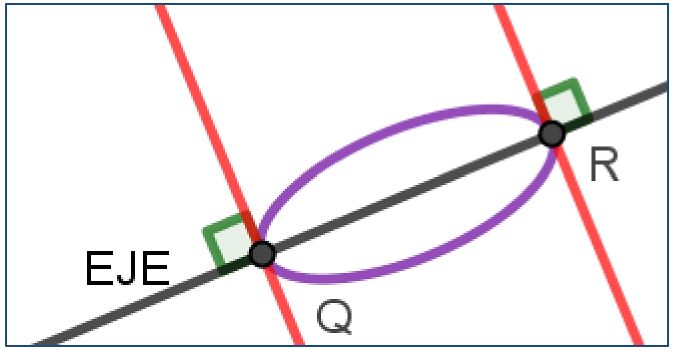


cónica∩**EJE**=$\{Q, R\}$

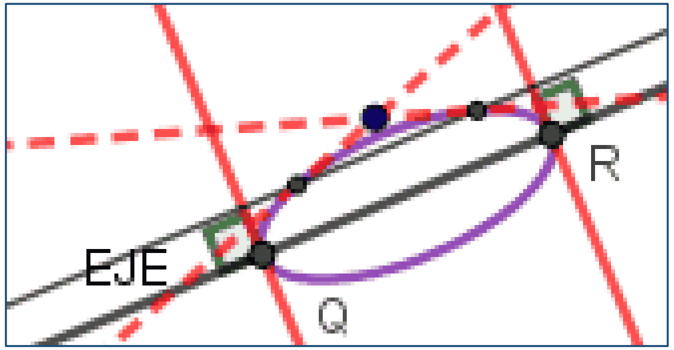
Las **tangentes** en Q, R son simétricas respecto al **EJE**.



Las **tangentes** en los puntos de corte del **EJE** con la cónica son perpendiculares **al EJE.**



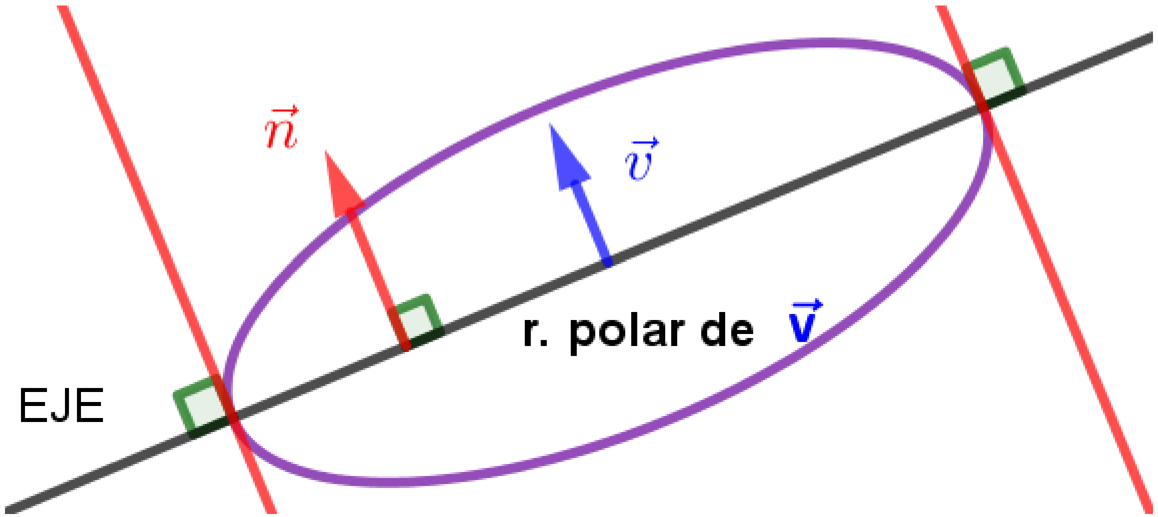
La **recta** que une dos <u>puntos de tangencia</u> es la **recta polar** del punto intersección de las **tangentes.**



Ejes de una cónica: de la definición geométrica a la algebraica (II).

EJE = Recta respecto a la cuál la cónica es simétrica

EJE = **recta polar** de una **dirección** perpendicular a él.



Cónica: $(x \quad y \quad 1)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = 0$ Dirección: $\vec{v} = (p \quad q)$

Recta polar de $\vec{v} = (p \quad q)$

$$\underbrace{(p \quad q \quad 0)A}_{(a \quad b \quad c)}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{ax + by}_{\vec{n} = (a, b)} + c = 0 \\ \text{v. normal} \end{array} \right.$$

EJE $\perp \vec{v}$ $\boxed{\vec{n} = \lambda\vec{v}}$ $\lambda \neq 0$

$$(a \quad b \quad c) = (p \quad q \quad 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\vec{n} = (a \quad b) = (p \quad q)T \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = (p \quad q)T = \lambda\,(p \quad q) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} \qquad \lambda \neq 0}$

Un **EJE** es la **recta polar** de un **autovector** de T asociado a un **autovalor no nulo**.

1) Polinomio característico de T: $p(\lambda) = \det(T\text{-}\lambda\mathrm{Id})$

2) $p(\lambda) = 0$. Autovalores λ_i de T **no nulos**.

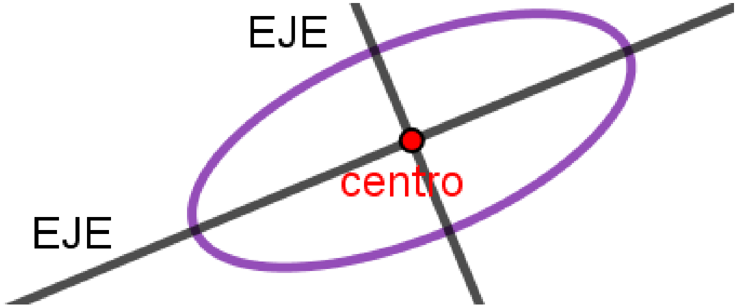
3) Autovector $(p \quad q)$ asociado a $\lambda_i \neq 0$: $(T - \lambda_i Id)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

4) Para cada **autovector** $(p \quad q)$ recta polar:

EJE $\quad (p \quad q \quad 0)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = 0$

Vértices de una cónica.

Propiedad: Si una cónica tiene centro pertenece a cualquier EJE



EJE $\quad (p \quad q \quad 0)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$

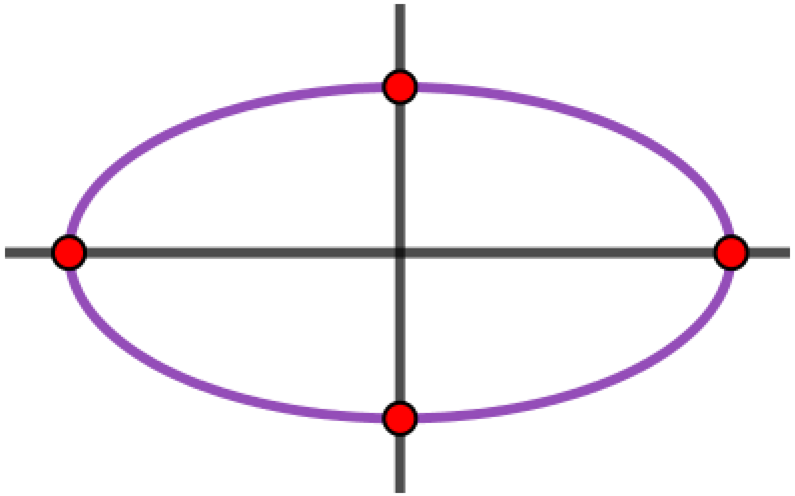
(a,b) centro $\Rightarrow A\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}$

El **centro** (a,b) verifica la ecuación del **EJE**

$$(p \quad q \quad 0)A\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}=(p \quad q \quad 0)\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}$$

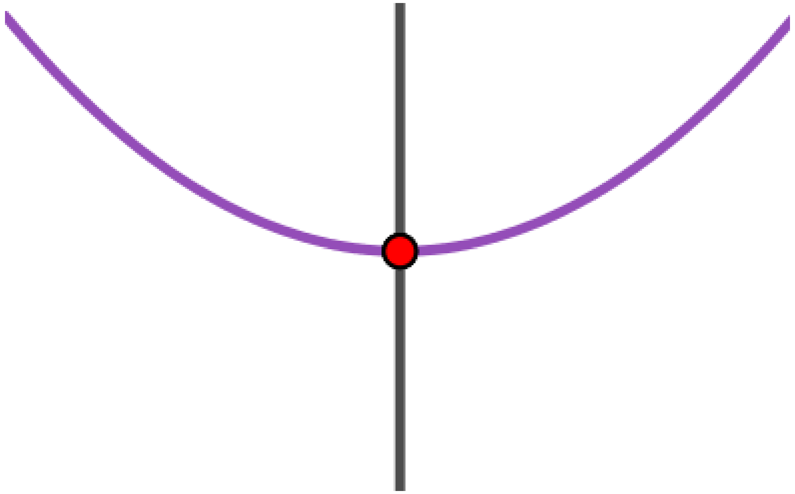
Vértices = EJES ∩ cónica

ELIPSE $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$



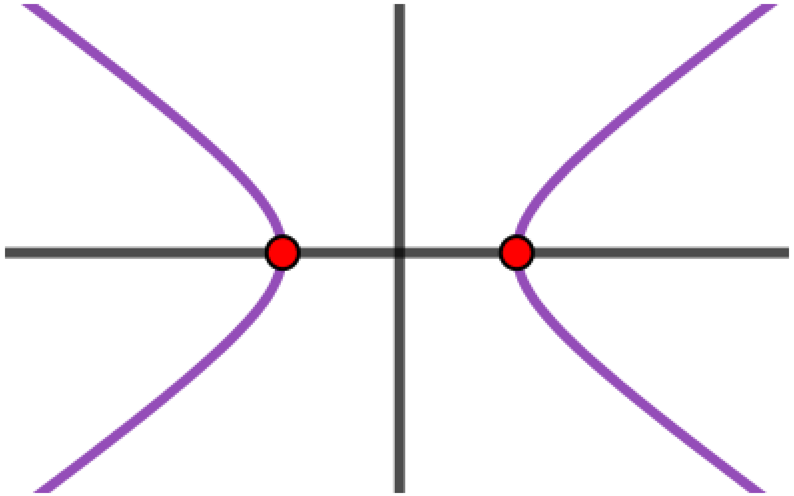
Dos EJES. Cuatro Vértices

PARÁBOLA $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$



Un EJE. Un Vértices

HIPÉRBOLA $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$



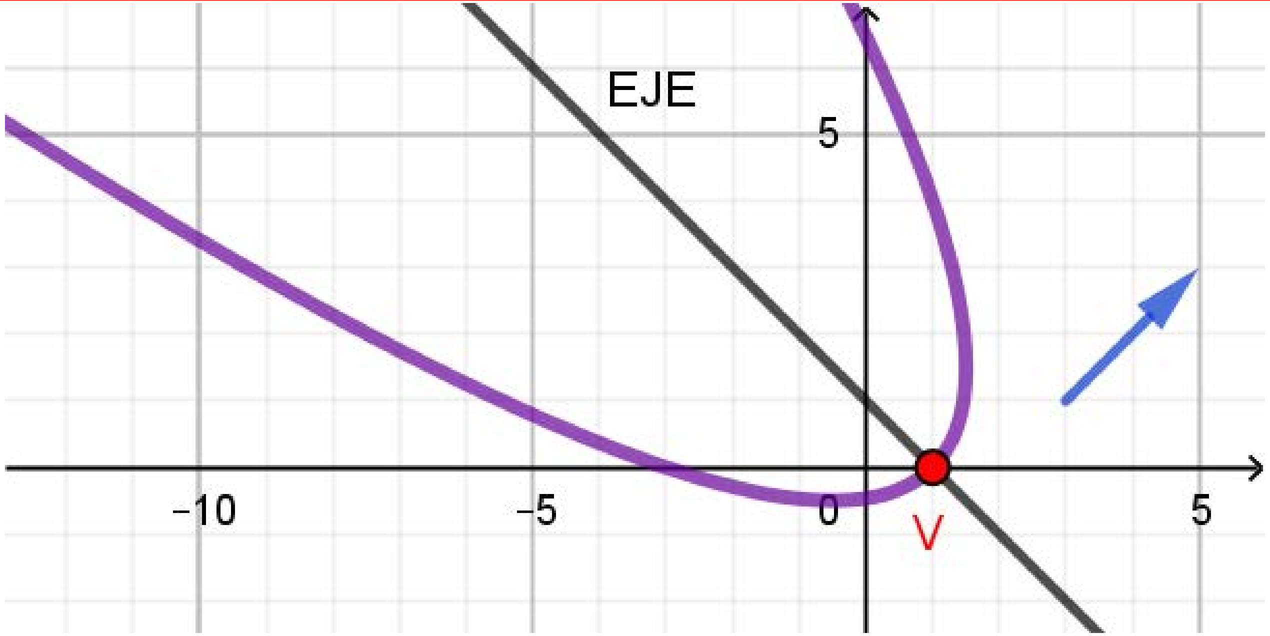
Dos EJES. Dos Vértices

Ejemplo: eje y vértice de una parábola.

Cónica: $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y - 3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJE = **recta polar** de un **autovector** de T de un **autovalor no nulo**.



1) Polinomio característico de T:

$$p(\lambda) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

2) $p(\lambda) = 0$. **Autovalores** λ_i de T **no nulos**.

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \cancel{\lambda_2 = 0} \end{cases}$$

NO se utiliza para hallar EJES

3) Autovector $(p \quad q)$ asociado a $\lambda_1 = 2$:

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -p + q = 0$$

$$\boxed{(p, q) = (1, 1)}$$

4) El **EJE** es la recta polar de $(1, 1)$:

$$(1 \quad 1 \quad 0)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 2y - 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x + y - 1 = 0}$$

Vértice = **EJE** ∩ **cónica**

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x = 1 - y$$
$$(1-y)^2 2(1-y)y + y^2 + 2(1-y) - 6y - 3 = 0$$

$$-8y = 0$$

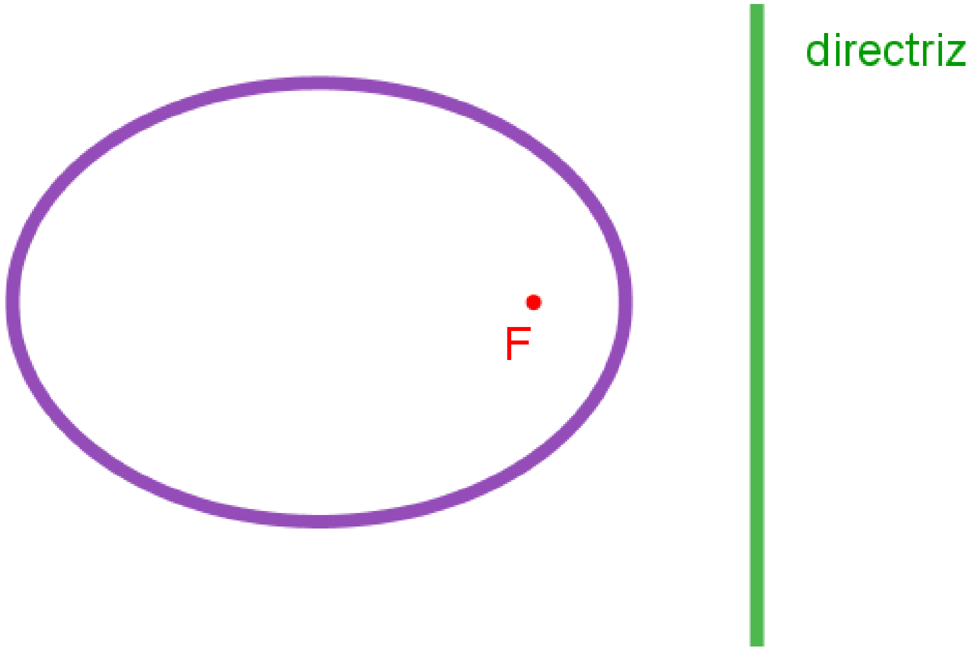
$$\boxed{V = (1, 0)}$$

Foco, directriz y excentricidad de una cónica

F = $\boldsymbol{foco}$ | $\boldsymbol{directriz}$ = **recta polar** del $\boldsymbol{foco}$ **F**

Para todo punto $\mathbf{X}$ ∈**cónica:**

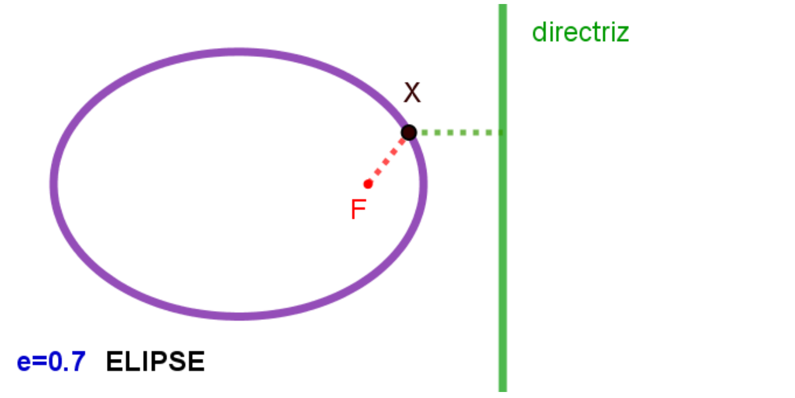
$$\frac{\textbf{distancia}(\boldsymbol{foco}, \boldsymbol{X})}{\textbf{distancia}(\boldsymbol{directriz}, \boldsymbol{X})} = \underbrace{\boldsymbol{e} \quad \textbf{Excentricidad}}_{\textbf{constante}}$$



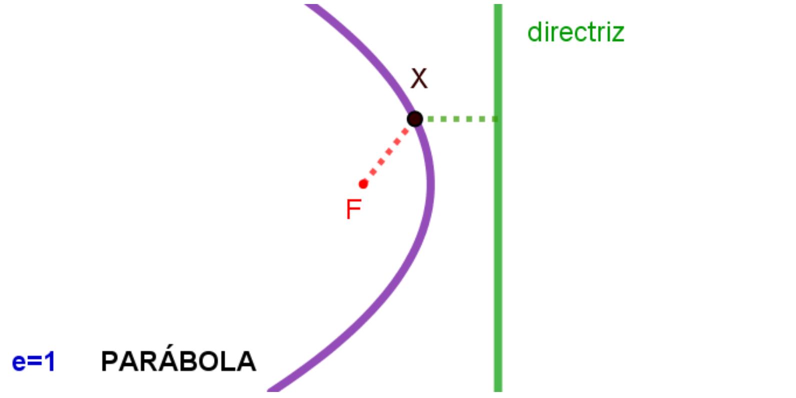
Excentricidad: $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{e} < +\infty$

$$\begin{cases} \mathbf{0} \leq \boldsymbol{e} < \mathbf{1} & \textbf{ELIPSE } (\boldsymbol{e} = \mathbf{0} \textbf{ circunferencia}) \\ \boldsymbol{e} = \mathbf{1} & \textbf{PARÁBOLA} \\ \boldsymbol{e} > \mathbf{1} & \textbf{HIPÉRBOLA} \end{cases}$$

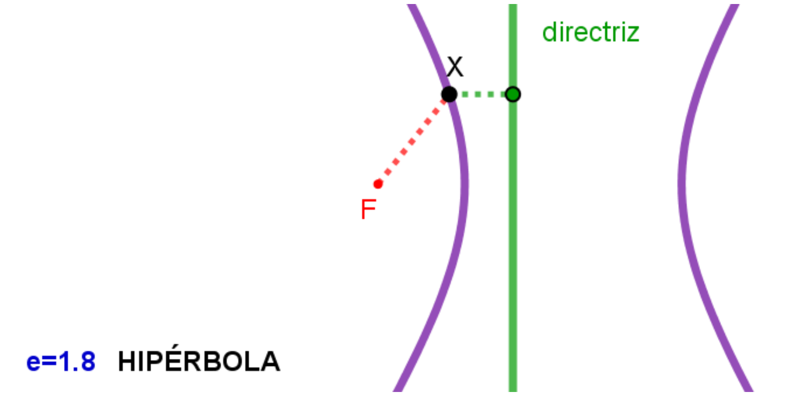
ELIPSE $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{e} < \mathbf{1}$



PARÁBOLA $\boldsymbol{e} = \mathbf{1}$



HIPÉRBOLA $\boldsymbol{e} > \mathbf{1}$



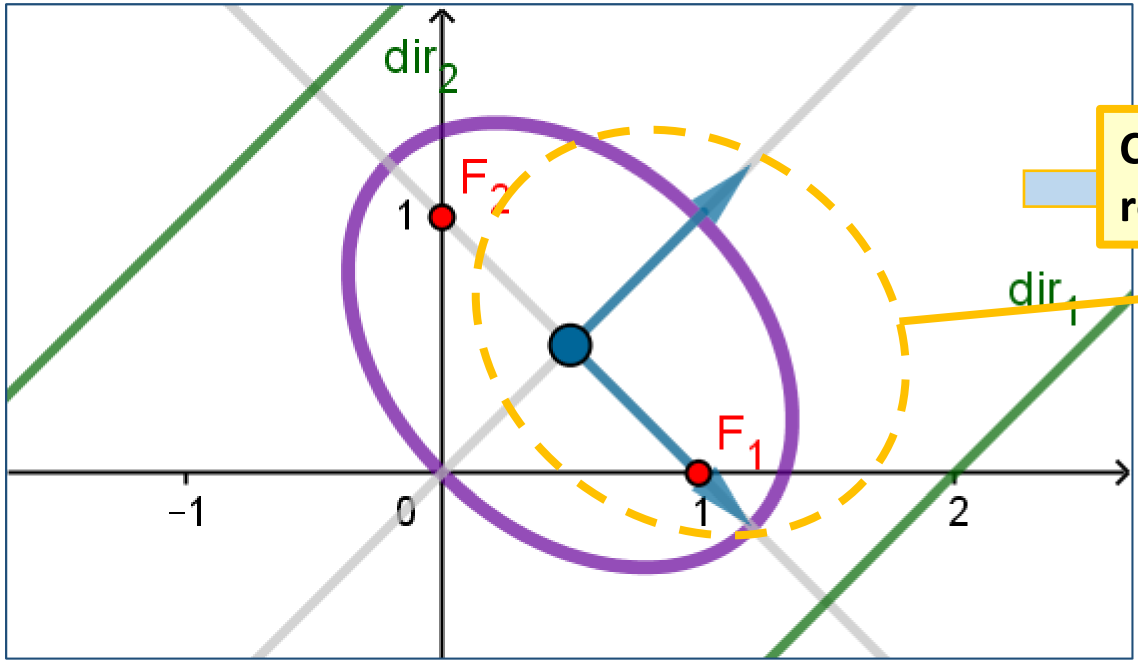
Estrategia para el cálculo del foco, directriz y excentricidad de una cónica.

Ecuación en la referencia inicial:

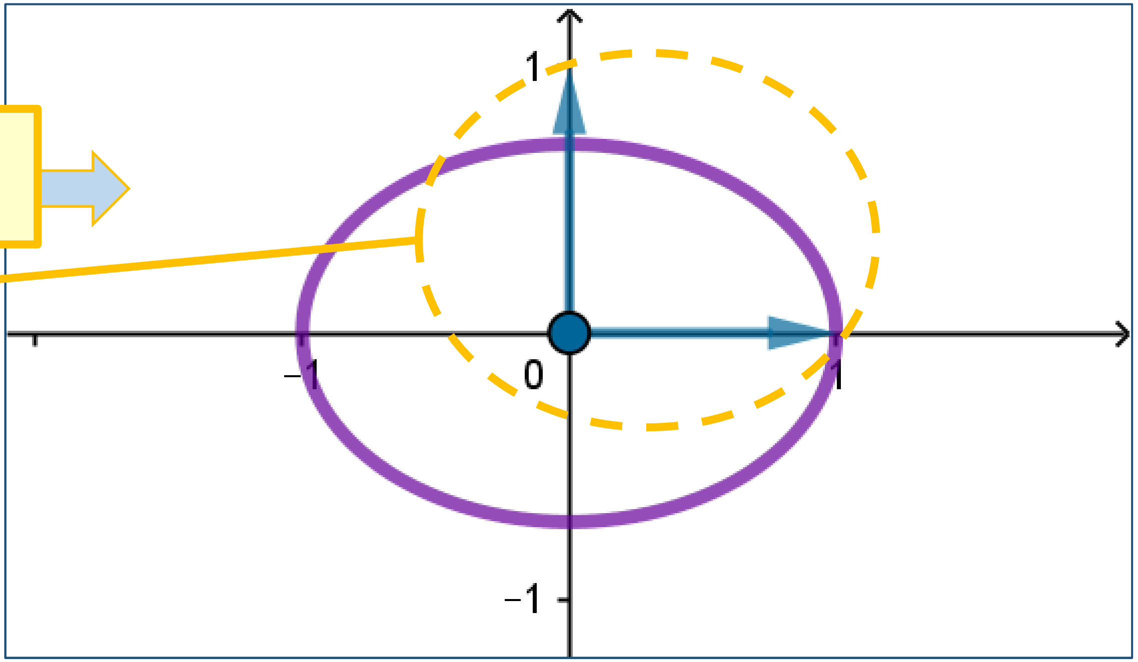
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Ecuación reducida en una nueva referencia:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$



Cambio de referencia



Focos:

$$F_i = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + M_{CB} \begin{pmatrix} \pm c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Directrices=Rectas polares de focos

$$(\underbrace{* \quad *}_{F_i} \quad 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ecuación de cambio de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + M_{CB}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Nuevo origen

Focos:

$$\boxed{\begin{array}{l} F'_1 = (c, 0) \\ F'_2 = (-c, 0) \end{array}}$$

con $c^2 = a^2 - b^2$

Resumen de puntos y rectas notables de una cónica.

Cónica: A matriz asociada

$C=(a,b)$ centro $\qquad A\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}$ $\quad h$ cualquier valor

Dirección asintótica (p,q) $\qquad (p\quad q)T\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=0$

Asíntotas a la cónica

(p,q) dirección asintótica $\qquad (p\quad q\quad 0)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$

EJE = **recta polar** de un **autovector** de T asoc. a un **autovalor** $\neq 0$.

1) Polinomio característico de T: $p(\lambda)=\det(T\text{-}\lambda \mathrm{Id})$

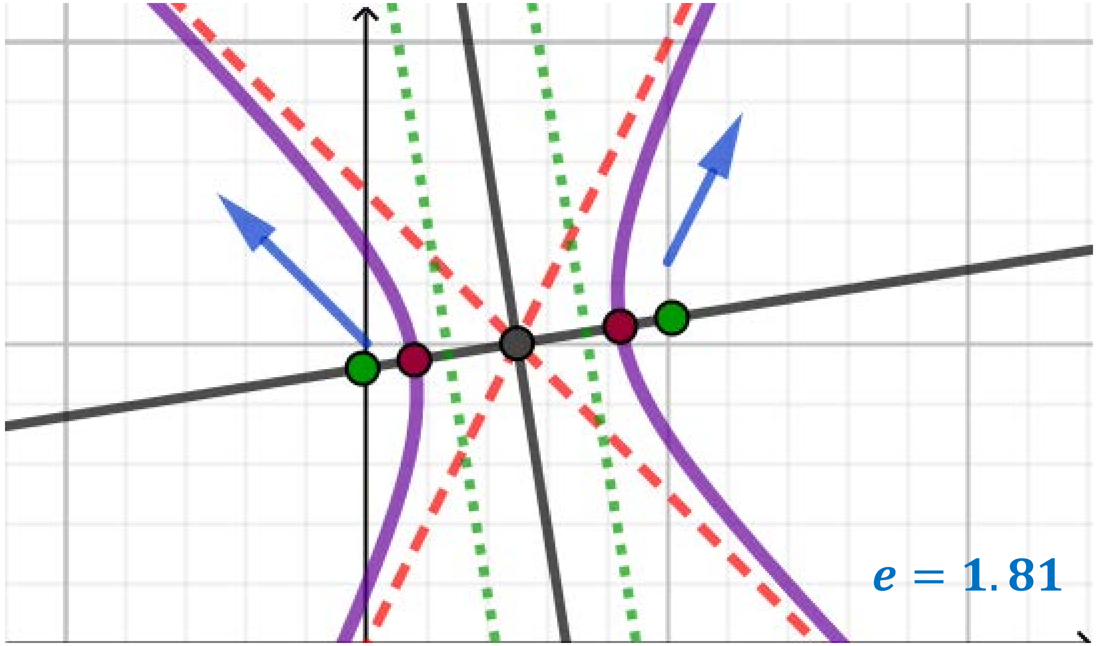
2) $p(\lambda)=0$. Autovalores λ_i de T **no nulos.**

3) Autovector $(p\quad q)$ asociado a $\lambda_i\neq 0$: $(T-\lambda_i Id)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

4) Para cada autovector $(p\quad q)$ recta polar:

$$(p\quad q\quad 0)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$$

Vértice = EJE ∩ cónica



F = $foco$ | $directriz$ = **recta polar** del $foco$ F

Para todo punto $\mathbf{X}\in$ **cónica:**

$$\frac{\text{distancia}(foco, X)}{\text{distancia}(directriz, X)}=e\ \underbrace{\text{Excentricidad}}_{\text{constante}}$$

La **forma** más cómoda de calcularlos es mediante un **cambio de referencia** y paso a la **cónica reducida**