Álgebra Lineal II

TEMA II- Espacios vectoriales euclídeos.

Capítulo 4. Producto vectorial y producto mixto.

Producto vectorial y producto mixto.

Luis Fuentes García (2022).

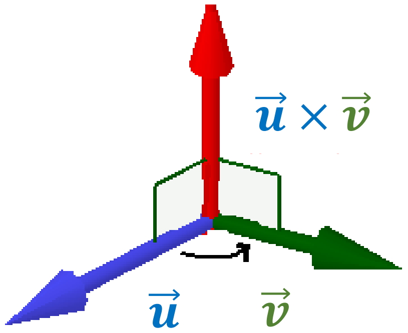
Definición de producto vectorial.

Observación previa: El **producto vectorial** sólo tiene sentido en tres dimensiones.

Trabajamos en $\boldsymbol{R}^3$ dotado de un **producto escalar** y fijada un **base de referencia** que da la **orientación positiva**.

Definición: Dados $\vec{u},\vec{v}\in\boldsymbol{R}^3$ se define su **producto vectorial** $\vec{u}\times\vec{v}$ como el **vector:**

- si $\vec{u},\vec{v}$ son ***dependientes*** entonces $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$.
- si $\vec{u},\vec{v}$ son ***independientes*** entonces $\vec{u}\times\vec{v}$ es el **único vector** cumpliendo:
    - i) $\vec{u}\times\vec{v}$ **es ortogonal** a $\vec{u},\vec{v}$
    - ii) $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\,\boldsymbol{sin}\,\angle(\vec{u},\vec{v})$
    - iii) $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ **orientación positiva**



Fórmula: Si trabajamos en una base ortonormal con orientación positiva $\boldsymbol{B}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$.

$$(x_1,x_2,x_3)_B\times(y_1,y_2,y_3)_B=\begin{Vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{Vmatrix}\vec{u}_1-\begin{Vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{Vmatrix}\vec{u}_2+\begin{Vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{Vmatrix}\vec{u}_3$$

Ejemplo estándar. Condiciones usuales: **Base canónica** $\boldsymbol{C}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ es ortonormal.

$$(1,2,0)\times(3,1,2)=\begin{Vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\vec{e}_1-\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{Vmatrix}\vec{e}_2+\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{Vmatrix}\vec{e}_3=4\vec{e}_1-2\vec{e}_2-5\vec{e}_3=(4,-2,-5)$$

Propiedades de producto vectorial.

Observación previa: El **producto vectorial** sólo tiene sentido en tres dimensiones.

Trabajamos en $\boldsymbol{R}^3$ dotado de un **producto escalar** y fijada un **base de referencia** que da la **orientación positiva**.

Definición: Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \boldsymbol{R}^3$ se define su **producto vectorial** $\vec{u} \times \vec{v}$ como el **vector:**

- si $\vec{u}, \vec{v}$ son ***dependientes*** entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
- si $\vec{u}, \vec{v}$ son ***independientes*** entonces $\vec{u} \times \vec{v}$ es el **único vector** cumpliendo:
  - i) $\vec{u} \times \vec{v}$ **es ortogonal** a $\vec{u}, \vec{v}$
  - ii) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \, \boldsymbol{sin} \angle(\vec{u}, \vec{v})$
  - iii) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ **orientación positiva**

$\boldsymbol{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ortonormal

$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_B$

$\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)_B$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left\| \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\|$$

Propiedades del producto vectorial:

i) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}, \vec{v}$ **son dependientes**

ii) Bilinelidad: $\begin{cases} (\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) \times \vec{v} = \alpha\vec{u}_1 \times \vec{v} + \beta\vec{u}_2 \times \vec{v} \\ \vec{u} \times (\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha\vec{u} \times \vec{v}_1 + \beta\vec{u} \times \vec{v}_2 \end{cases}$

iii) Antisimetría: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

Se pueden demostrar directamente a partir de las propiedades del determinante.

Aplicaciones del producto vectorial.

1) <u>La obvia:</u> dados **dos vectores** $\vec{u}, \vec{v}$ obtener un vector $\vec{u} \times \vec{v}$ **ortogonal** a ambos.

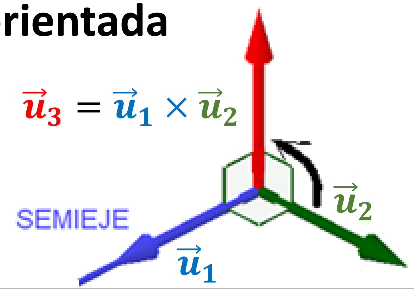
Ejemplo típico: para formar las bases auxiliares en la construcción de **giros** y **simetrías.**

<u>GIRO</u>

$B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ **ortonormal bien orientada**

$\vec{u}_1$ **semieje** $\qquad \vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$

$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$

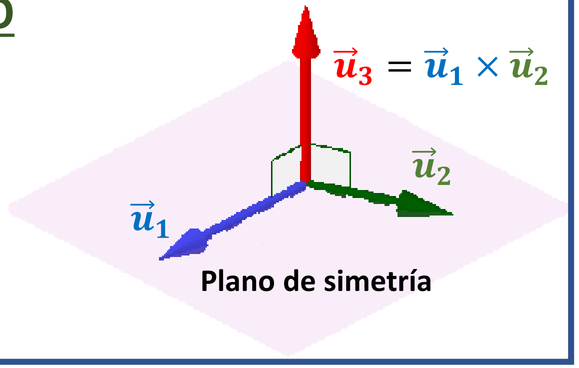


<u>SIMETRÍA respecto a un PLANO</u>

$B = \{\underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2}_{\text{Plano de simetría}}, \underbrace{\vec{u}_3}_{\text{Ortogonal al plano}}\}$

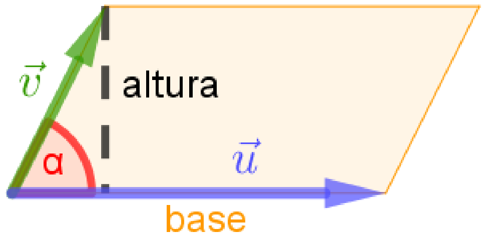
Plano de simetría | **Ortogonal al plano**

$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$



2) <u>Cálculo de áreas</u>:

<u>Área del paralelogramo</u>.

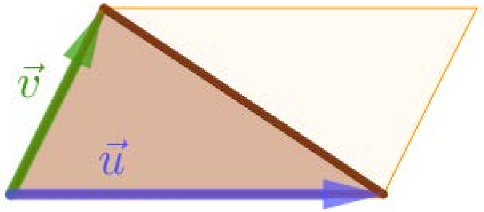


$$\text{Área} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

$$\text{Área} = \textbf{base} \cdot \textbf{altura} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\alpha)$$

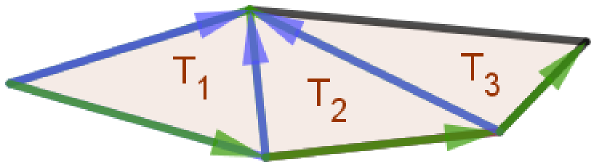
<u>Área del triángulo</u>.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$



<u>Área de un polígono.</u>

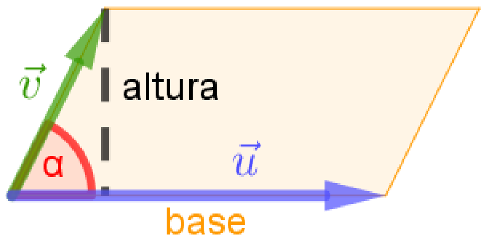
$$\text{Área} = \sum T_i$$



Aplicaciones del producto vectorial.

2) Cálculo de áreas:

Área del paralelogramo.

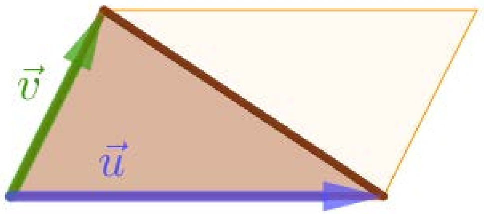


$$\text{Área} = \|\vec{u}\times\vec{v}\|$$

$$\text{Área} = \textbf{base}\cdot \textbf{\textit{altura}} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin(\alpha) = \|\vec{u}\times\vec{v}\|$$

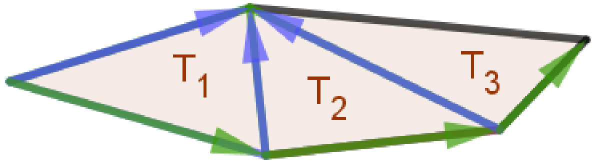
Área del triángulo.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\|$$



Área de un polígono.

$$\text{Área} = \sum T_i$$



En R^2:

$$\vec{u} = (x, y) \quad\rightarrow\quad (x, y, 0)$$

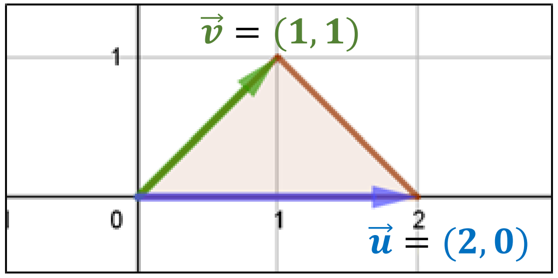
$$\vec{v} = (x', y') \quad\rightarrow\quad (x', y', 0)$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left\|\begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & 0 \\ x' & y' & 0 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\vec{e}_3 = \left(0, 0, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right)$$

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \left\|\left(0, 0, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right)\right\| = \left|\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right|$$

$$\boxed{\text{Área} = \left|\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right|}$$

Ejemplo: **Área del triángulo** cuyos lados son los vectores (2,0) y (1,1)



$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|2| = 1$$

Definición de producto mixto.

Definición: Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$ se define su **producto mixto** $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ como el **número**: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Fórmula: Si trabajamos en una base ortonormal con orientación positiva $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

$$[(x_1, x_2, x_3)_B, (y_1, y_2, y_3)_B, (z_1, z_2, z_3)_B] = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{Vmatrix}$$

Ejemplo estándar. Condiciones usuales: Base canónica $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es ortonormal.

$$[(1, 2, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 3)] = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix} = -1$$

Propiedades del producto mixto:

i) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son dependientes

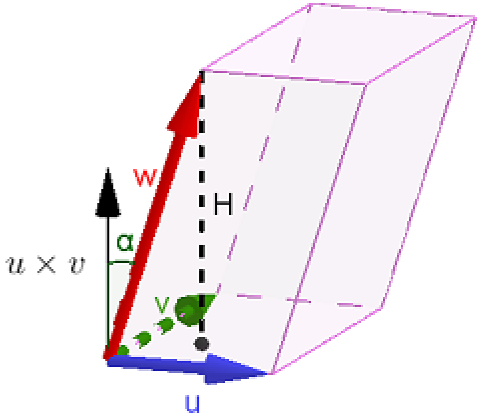
ii) **Trilinelidad**:
$$\begin{cases} [\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2] \end{cases}$$

iii) **Antisimetría**: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$

Se pueden demostrar directamente a partir de las propiedades del determinante.

Aplicaciones del producto mixto.

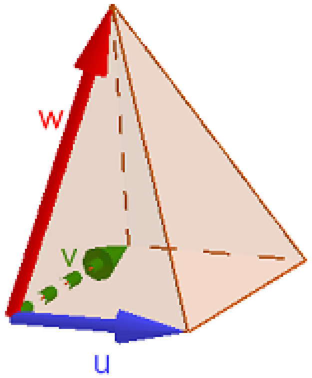
Volumen de paralelepípedo.



$$\text{VOL}= |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\,]|$$

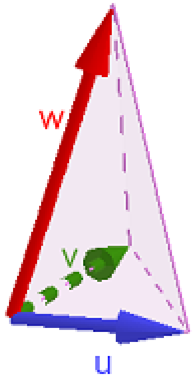
$$Vol = Area\ Base \cdot H = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|\,|\cos(\alpha)| = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\,]|$$

Volumen pirámide cuadrangular.



$$\text{VOL}= \frac{1}{3}\,|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\,]|$$

Volumen tetraedro.



$$\text{VOL} = \frac{1}{6}\,|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\,]|$$