Ejercicios Resueltos del Tema 0

1. Determine cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones:

   a) En 1990, George Bush era presidente de los Estados Unidos

   Puesto que se trata de un enunciado declarativo, es sin duda una proposición

   b) $x + 3$ es un entero positivo

   Puesto que el enunciado es verdadero o falso, según los valores que toma x, no es una proposición

   c) ¡Si todas las mañanas fuesen tan soleadas como ésta!

   Dado que se trata de una oración que expresa un deseo y no es un enunciado declarativo, no es una proposición

   d) Quince es un número par

   La oración es claramente una proposición falsa

   e) Si Carlos suspende esta asignatura, su padre se enfadará

   Está claro que es un argumento verdadero o falso (aunque no lo sepamos)

   f) ¿Qué hora es?

   Es una situación similar a la del apartado c), por lo que no es una proposición

   g) De Madrid al cielo

   Es una situación similar a la del apartado c), por lo que no es una proposición

   h) Hasta el 30 de Junio de 2002, Arantxa Sánchez Vicario había ganado tres veces el abierto de Francia

   Independientemente de que sea verdad o no, está claro que se trata de una proposición

2. Sean p y q las proposiciones siguientes:

   p : Hace frío
   q : Llueve

   Expresa cada una de las siguientes proposiciones como una frase:

   a) $\neg p$

   No hace frío

   b) $p \wedge q$

Hace frío y llueve

c) $p \vee q$

Hace frío o llueve

d) $q \vee \neg p$

Llueve o no hace frío

e) $\neg p \wedge \neg q$

No hace frío y no llueve

f) $\neg\neg q$

Llueve

g) $p \rightarrow q$

Si hace frío, llueve

h) $\neg p \rightarrow \neg q$

Si no hace frío, no llueve

3. Sean p, q y r las proposiciones siguientes:

p : Has obtenido un sobresaliente en el examen final
q : Has hecho todos los ejercicios de este libro
r : Has obtenido un sobresaliente en esta asignatura

Escribe las siguientes proposiciones utilizando p, q y r y los conectivos lógicos:

a) Has obtenido un sobresaliente en esta asignatura, pero no has hecho todos los ejercicios de este libro.

$r \wedge \neg q$

b) Has hecho todos los ejercicios de este libro, has obtenido un sobresaliente en esta asignatura y también en el examen final.

$p \wedge q \wedge r$

c) Para obtener un sobresaliente en esta asignatura, es necesario obtener un sobresaliente en el examen final.

$r \rightarrow p$

d) Conseguir un sobresaliente en el examen final y realizar todos los ejercicios de este libro es suficiente para obtener un sobresaliente en esta asignatura.

$(p \wedge q) \rightarrow r$

e) Puedes conseguir un sobresaliente en esta asignatura si, y sólo si, haces todos los ejercicios de este libro o tu calificación en el examen final es de sobresaliente.

$r \leftrightarrow (q \vee p)$

4. Escribe cada uno de los siguientes estamentos en la forma: si p, entonces q.

   a) Nieva siempre que el viento sopla del noroeste.

   Si el viento sopla del noreste, entonces nieva

   b) Que el Depor gane la liga, implica que ha derrotado al Real Madrid

   Si el Depor gana la liga, entonces ha derrotado al Real Madrid

   c) Es necesario caminar ocho kilómetros para llegar a la meta

   Si llegas a la meta, entonces has caminado ocho kilómetros

   d) Para que una película gane un Oscar, es suficiente con que le guste a los miembros de la Academia de Hollywood

   Si una película le gusta a los miembros de la Academia de Hollywood, ganará un Oscar

   e) La garantía de tu equipo es válida sólo si lo has comprado hace menos de noventa días.

   Si la garantía es válida, entonces has comprado tu equipo hace menos de noventa días

5. Construye las tablas de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

   a) $p \wedge \neg p$

   b) $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	0	1
1	0	0	1

   c) $[(p \to q) \wedge p] \to q$

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

   d) $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1

e) $p \wedge \top$

f) $p \vee \top$

g) $p \wedge \bot$

h) $p \vee \bot$

p	$\top$	$\bot$	$p \wedge \top$	$p \vee \top$	$p \wedge \bot$	$p \vee \bot$
0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1

i) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Nótese que se trata de una tautología, por lo que son dos proposiciones lógicamente equivalentes.

6. Relaciona cada una de las siguientes tautologías con el argumento que le corresponde.

Tautologías

a) $p \vee \neg p$

b) $p \wedge q \rightarrow p$

c) $p \wedge q \rightarrow q$

d) $p \rightarrow (p \vee q)$

e) $q \rightarrow (p \vee q)$

f) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Argumentos

a) $x < 3$ y $x < -1$
$\therefore\ x < -1$

Está claro que se trata de la tautología del apartado c)

b) n es divisible por 3
$\therefore\ n$ es divisible por 2 o n es divisible por 3

Se trata de la tautología del apartado e)

c) Si $x^3 = y^3$, entonces $x = y$
$\therefore$ Si $x \neq y$, entonces $x^3 \neq y^3$

Se trata de la tautología del apartado f)

d) Ricardo aprobó Matemáticas y Química
$\therefore$ Ricardo aprobó Química

Se trata de la tautología del apartado c)

e) $x > 1$ o $x \leq 1$

Se trata de la tautología del apartado a)

f) Si n es divisible por 5, entonces $-n$ es divisible por 5
$\therefore$ Si $-n$ no es divisible por 5, entonces n no es divisible por 5

Se trata de la tautología del apartado f)

g) $x > 1$
$\therefore$ $x > 1$ o $x < -1$

Se trata de la tautología del apartado d)

h) Carmen sabe francés y alemán
$\therefore$ Carmen sabe francés

Se trata de la tautología del apartado b)

7. En el fondo de un viejo armario descubres una nota escrita por un pirata famoso por su sentido del humor y su afición a los acertijos lógicos. En la nota dice que ha escondido un tesoro en algún lugar de una propiedad. El pirata enumera cinco enunciados todos ellos verdaderos y te reta a que descubras dónde está el tesoro. He aquí los enunciados:

   a) Si la casa está cerca de un lago, el tesoro no está en la cocina.

   b) Si el árbol de la entrada es un olmo, el tesoro está en la cocina.

   c) La casa está cerca de un lago.

   d) El árbol de la entrada es un olmo o el tesoro está enterrado debajo del mástil.

   e) Si el árbol de la entrada es un roble, el tesoro está en el garaje.

   ¿Dónde está el tesoro?

   Denotemos por p,q,r,s,t y v las siguientes proposiciones:

   p : **La casa está cerca del lago**
   q : **El tesoro está en la cocina**
   r : **El árbol de la entrada es un olmo**
   s : **El tesoro está enterrado debajo del mástil**
   t : **El árbol de la entrada es un roble**
   v : **El tesoro está en el garaje**

Los enunciados se formalizan en $p \to \neg q$, $r \to q$, p, $r \vee s$, $t \to v$. Veamos ahora cómo se deduce la conclusión:

$(p \to \neg q) \wedge (r \to q) \wedge p \wedge (r \vee s)$	$\Rightarrow$	**Ejercicio 5 (c)**
$\neg q \wedge (r \to q) \wedge (r \vee s)$	$\Rightarrow$	**Ejercicio 5 (d)**
$\neg r \wedge (r \vee s)$	$\Leftrightarrow$	**Ejercicio 5 (i)**
$(\neg r \wedge r) \vee (\neg r \wedge s)$	$\Leftrightarrow$	**Ejercicio 5 (e)**
$\bot \vee (\neg r \wedge s)$	$\Leftrightarrow$	**Ejercicio 5 (e)**
$\neg r \wedge s$	$\Rightarrow$	**Ejercicio 6**
s		

Concluímos, por lo tanto, que el tesoro está enterrado debajo del mástil.[5]

8. Escoja la negación correcta de los siguientes enunciados:

   a) A algunas personas le gustan las Matemáticas

      1) A algunas personas no le gustan las Matemáticas
      2) A todo el mundo le disgustan las Matemáticas
      3) A todo el mundo le gustan las Matemáticas

      Claramente el enunciado se formaliza $\exists x \ m(x)$, es decir, hay al menos una persona a la que le gustan las Matemáticas. Así pues, la negación es $\forall x \ \neg m(x)$ que se corresponde con el segundo enunciado.

   b) A todo el mundo le gustan los helados

      1) A nadie le gustan los helados
      2) A todo el mundo le disgustan los helados
      3) A alguna persona no le gustan los helados

      La negación es el tercer enunciado

   c) Todo el mundo es alto y delgado

      1) Algunas personas son bajas y gordas
      2) Nadie es alto y delgado
      3) Hay alguna persona que es baja o gorda

      Se trata de un enunciado del tipo $\forall x \ p(x) \wedge q(x)$, así que su negación será $\exists x \ \neg p(x) \vee \neg q(x)$, que se corresponde con la tercera opción.

   d) Algunos cuadros están viejos o deteriorados

      1) Todos los cuadros están nuevos y bien conservados
      2) Algunos cuadros no son viejos o no están deteriorados

[5] Nótese que no hemos necesitado utilizar la última hipótesis.

3) Todos los cuadros están nuevos o bien conservados

En este caso el enunciado se formaliza como $\exists x\ p(x) \vee q(x)$**, luego la respuesta correcta es la primera que se corresponde con** $\forall x\ \neg p(x) \wedge \neg q(x)$

9. Sea $p(x)$ la funcion proposicional $x^2 = 2x$, donde el universo comprende todos los enteros. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

   a) $p(0)$

   b) $p(1)$

   c) $p(2)$

   d) $p(-2)$

   e) $\exists x p(x)$

   f) $\forall x p(x)$

   Puesto que la ecuación sólo tiene como soluciones a 0 **y** 2**, son verdaderas (a), (c) y (e).**

10. Para el universo de los enteros, sean $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ y $t(x)$ las siguientes funciones proposicionales.

$p(x)$:	$x > 0$
$q(x)$:	x es par
$r(x)$:	x es un cuadrado perfecto
$s(x)$:	x es divisible por 4
$t(x)$:	x es divisible por 5

   a) Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica

   1) Al menos un entero es par
   2) Existe al menos un entero positivo que es par
   3) Si x es par, entonces x no es divisible entre 5
   4) Ningún entero par es divisible entre 5
   5) Existe al menos un entero par divisible entre 5
   6) Si x es par y un cuadrado perfecto, entonces x es divisible entre 4

   Solución

   1) $\exists x q(x)$
   2) $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$
   3) $\forall x[q(x) \rightarrow \neg t(x)]$
   4) $\forall x[q(x) \rightarrow \neg t(x)]$

5) $\exists x[q(x) \wedge t(x)]$

6) $\forall x[(q(x) \wedge r(x)) \rightarrow s(x)]$

b) Determine si cada una de las seis proposiciones del apartado anterior es verdadera o falsa. Para cada proposición falsa, dé un contraejemplo.

Solución

1) **Es verdadera**
2) **Es verdadera**
3) **Es falsa, basta tomar los múltiplos de 10**
4) **Es la misma del apartado anterior**
5) **Es verdadera**
6) **Es verdadera**

c) Exprese en palabras cada una de las siguientes representaciones simbólicas:

1) $\forall x[r(x) \rightarrow p(x)]$
2) $\forall x[s(x) \rightarrow q(x)]$
3) $\forall x[s(x) \rightarrow \neg t(x)]$
4) $\exists x[s(x) \wedge \neg r(x)]$
5) $\forall x[\neg r(x) \vee \neg q(x) \vee s(x)]$

Solución

1) **Si x es un cuadrado perfecto, entonces x es estrictamente positivo**
2) **Si x es divisible entre 4, entonces es par**
3) **Si x es divisible entre 4, entonces x no es divisible entre 5**
4) **Existe algún entero que es divisible entre 4 y no es un cuadrado perfecto**
5) **Todos los enteros son divisibles entre 4, o impares o no son cuadrados perfectos**

d) Proporcione un contraejemplo para cada proposición falsa del apartado anterior.

Sólo es falsa la tercera, dado que, para cualquier entero a divisible por 20, no es cierta la proposición $s(a) \rightarrow \neg t(a)$

11. Escriba la negación de cada una de las siguientes proposiciones verdaderas. (Para las partes a), b) y c), el universo es el de los enteros y para los apartados d) y e), el universo es el de los reales.)

a) Para todo entero n, si n no es divisible entre 2, entonces n es impar *b*) Si el cuadrado de un entero es impar, entonces el entero es impar

c) Si k, m y n son enteros tales que $k - m$ y $m - n$ son impares, entonces $k - n$ es par

d) Si x es un número real tal que $x^2 > 16$, entonces $x < -4$ o $x > 4$

e) Para todo número real x, si $|x - 3| < 7$, entonces $-4 < x < 10$

Solución

a) **Existe un entero que no es divisible por 2 y no es impar**

b) **Existe un entero par cuyo cuadrado es impar**

c) **Existen enteros k, m y n tales que $k - m$, $m - n$ y $k - n$ son impares**

d) **Existe un número real x tal que $x^2 > 16$ y sin embargo $-4 < x < 4$**

e) **Existe un número real x tal que $|x - 3| \geq 7$ y sin embargo $x \leq -4$ o $x \geq 10$**

Ejercicios Propuestos

1. Carlos, Juan y Ricardo son acusados de fraude fiscal. En el juicio, declaran:

   - **Carlos:**
     Juan es culpable y Ricardo es inocente.
   - **Juan:**
     Carlos es culpable sólo si Ricardo también lo es
   - **Ricardo:**
     Yo soy inocente pero, al menos uno de los otros dos, es culpable.

   Responde a las siguientes cuestiones[6]:

   a) Si todos son inocentes, ¿quién ha mentido?

   b) Si todos dicen la verdad, ¿quién es inocente y quién es culpable?

   c) Si cada culpable miente y cada inocente dice la verdad, ¿quién es inocente y quién es culpable?

2. Indique si las siguientes afirmaciones sobre los números enteros son verdaderas o falsas.

   a) $\forall x \, \forall y \, , x + y = 0$

   b) $\forall x \, \exists y \, , x + y = 0$

   c) $\exists x \, \forall y \, , x + y = 0$

   d) $\exists x \, \exists y \, , x + y = 0$

   e) $\forall x \, \forall y \, , xy = 0$

   f) $\forall x \, \exists y \, , xy = 0$

   g) $\exists x \, \forall y \, , xy = 0$

   h) $\exists x \, \exists y \, , xy = 0$

[6]Lo más conveniente es comenzar formalizando las declaraciones de los acusados mediante el uso de proposiciones.