Ejercicios Resueltos del Tema 4

1. Traduce al lenguaje algebraico utilizando, para ello, una o más incógnitas:

   a) La suma de tres números consecutivos

   b) Un número más la mitad de otro

   c) El cuadrado de la suma de dos números

   d) La diferencia de los cuadrados de dos números

   e) La semisuma de dos números

   a) $x + (x + 1) + (x + 2)$

   b) $x + \frac{y}{2}$

   c) $(x + y)^2$

   d) $x^2 - y^2$

   e) $\frac{x+y}{2}$

2. Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$,$Q(x) = x + 1$ y $R(x) = x^2 - 3x + 2$, halla los polinomios $P(x) + Q(x)$, $P(x).Q(x)$ y $P(x).R(x)$.

   Sumamos los términos de igual grado en $P(x)$ y $Q(x)$, obteniendo:

   $$P(x) + Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + x + 1 - 1 = 2x^3 - 4x^2 + 2x$$

   Con respecto al producto $P(x).Q(x)$, podemos hacerlo por dos métodos:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2x^3 & -4x^2 & +x & -1 \\
 & & & x & +1 \\
\hline
 & 2x^3 & -4x^2 & +x & -1 \\
2x^4 & -4x^3 & +x^2 & -x & \\
\hline
2x^4 & -2x^3 & -3x^2 & & -1
\end{array}$$

   o bien con la tabla:

	2	**-4**	**1**	**-1**	
	2	**-4**	**1**	**-1**	**1**
	2	**-4**	**1**	**-1**	**1**
2	**-2**	**-3**	**0**	**-1**	

Lo mismo ocurre con el producto $P(x).R(x)$

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & -4x^2 & +x & -1 \\ & & & x^2 & -3x & +2 \\ \hline & & 4x^3 & -8x^2 & +2x & -2 \\ & -6x^4 & +12x^3 & -3x^2 & +3x & \\ 2x^5 & -4x^4 & +x^3 & -x^2 & & \\ \hline 2x^5 & -10x^4 & +17x^3 & -12x^2 & +5x & -2 \end{array}$$

Si lo hacemos con la tabla, quedaría:

		2	**-4**	**1**	**-1**	
		2	**-4**	**1**	**-1**	**1**
		-6	**12**	**-3**	**3**	**-3**
		4	**-8**	**2**	**-2**	**2**
2	**-10**	**17**	**-12**	**5**	**-2**	

3. Efectua las divisiones:

   a) $(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2)$

   b) $(2x^3 - x + 3) : (x - 3)$

   c) $(-5x^4 + 2x^2 - 7) : (x + 1)$

   ¿Podrías hallar el resto de las dos últimas divisiones sin efectuar expresamente la división?

   a) **Hagamos la primera división:**

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & +\ 5x^3 & & -\ 2x & +\ 3 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{6-6} -\ 3x^4 & +\ 9x^3 & -\ 6x^2 & -\ 2x & +\ 3 & 3x^2 + 14x + 36 \\ & 14x^3 & -\ 6x^2 & & & \\ & -\ 14x^3 & +\ 42x^2 & -\ 28x & & \\ & & 36x^2 & -\ 30x & +\ 3 & \\ & & -\ 36x^2 & +\ 108x & -\ 72 & \\ & & & 78x & -\ 69 & \end{array}$$

   b) **Esta división y la siguiente las haremos aplicando el método de Ruffini:**

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & & 6 & 18 & 51 \\ \hline & 2 & 6 & 17 & 54 \end{array}$$

   El resto de la división es 54 **y el cociente** $2x^2 + 6x + 17$**.**

c)

	-5	0	2	0	-7
-1		5	-5	3	-3
	-5	5	-3	3	-10

El resto de la división es -10 y el cociente $-5x^3 + 5x^2 - 3x + 3$.

Con respecto a la pregunta que se formula, la respuesta es que sí, ya que, sabemos que el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $x - a$ es $P(a)$. Entonces, si $P(x) = 2x^3 - x + 3$, el resto de dividir $P(x)$ entre $x - 3$ es $P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 + 3 = 54$. Si $P(x) = -5x^4 + 2x^2 - 7$, el resto de dividir $P(x)$ entre $x + 1$ es $P(-1) = -5 + 2 - 7 = -10$.

4. Halla los productos:

   a) $x(2x + y + 1)$
   b) $2a^2(3a + 5a^3)$
   c) $5xy^2(2x + 3y)$

   a) $x(2x + y + 1) = 2x^2 + xy + x$
   b) $2a^2(3a + 5a^3) = 6a^3 + 10a^5$
   c) $5xy^2(2x + 3y) = 10x^2y^2 + 15xy^3$

5. *a*) Halla el valor de m sabiendo que la división de $x^3 - mx^2 + 5x - 2$ entre $x + 1$ es exacta.
   b) Halla el valor de m sabiendo que el resto de la división de $3x^3 + mx^2 + x - 4$ entre $x - 3$ es 8.
   c) ¿Cuánto deben valer a y b para que la división de $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b$ entre $x^2 - 5x + 1$ sea exacta??

   ***a*) Como el resto de la división de $x^3 - mx^2 + 5x - 2$ entre $x+1$ es $-1-m-5-2$, queremos determinar m para que dicho resto sea cero, es decir, $m = -8$.**
   ***b*) Razonando igual que en el apartado anterior, tenemos que $3 \cdot 27 + 9m + 3 - 4$ ha de ser igual a 8, con lo que $m = -8$.**

c) **Si la división, es exacta, el polinomio $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b$ es divisible por $x^2 - 5x + 1$, es decir, existen c y d tales que**

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b &= (x^2 - 5x + 1)(x^2 + cx + d) \\ &= x^4 + (c-5)x^3 + (d - 5c + 1)x^2 + (c - 5d)x + d \end{aligned}$$

con lo que, igualando coeficientes, se obtiene que: $c - 5 = -5$, $d - 5c + 1 = 3$, $c - 5d = a$ y $d = b$. Finalmente, se tiene que $c = 0$, $d = 2$, $a = -10$ y $b = 2$.

6. Descompón en factores irreducibles los polinomios:

   a) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$

   b) $x^4 - 10x^2 + 9$

   c) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

a) **Sabemos que si $x - a$ divide a $P(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$, entonces a es un divisor de 12, es decir a=$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Dividiendo $P(x)$ entre $x - 2$, nos queda:**

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & 7 & -12 & 12 \\ 2 & & 2 & -4 & 6 & -12 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{array}$$

con lo que

$$P(x) = (x - 2)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6).$$

Dividiendo de nuevo por $x - 2$, resulta:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & & 2 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

Resumiendo, la descomposición de $P(x)$ es

$$P(x) = (x - 2)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) = (x - 2)^2(x^2 + 3),$$

ya que $x^2 + 3$ es irreducible por tener discriminante negativo (es decir, sin raíces reales).

b) **Sea ahora $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. Si llamamos $z = x^2$, nos queda $P(z) = z^2 - 10z + 9 = (z - 1)(z - 9)$. Teniendo en cuenta que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, resulta que $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.**

c) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$**. Buscamos ahora** $x - a$ **con** a **divisor de** 8 **y encontramos que, al dividir entre** $x - 2$**, se obtiene que:**

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ 2 & & 2 & -6 & -8 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

Así pués: $P(x) = x(x-2)(x^2 - 3x - 4) = x(x-2)(x+1)(x-4)$

7. ¿Cuál es el polinomio mónico de segundo grado $P(x)$ que verifica que $P(5) = 6$ y que tiene a 3 como raíz?

   Como $P(x)$ **es un polinomio mónico de grado dos que tiene a** $x - 3$ **como factor, sabemos que** $P(x) = (x-3)(x+a)$**. Puesto que, además** $P(5) = 6$**, se sigue que** $2(5+a) = 6$ **y** $a = -2$**, así que** $P(x) = (x-2)(x-3)$

8. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios:

   a) $x^2 - 2x + 1$ y $2x - 2$
   b) $x^4 - 4x^2$ y $x^3 - 4x^2 + 4x$
   c) $x^2 - 3x$, $x^2 - 9$ y $x^2 - 6x + 9$

a) **Puesto que**

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= (x-1)^2 \\ 2x - 2 &= 2(x-1) \end{aligned}$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} mcd(x^2 - 2x + 1, 2x - 2) &= (x-1) \\ mcm(x^2 - 2x + 1, 2x - 2) &= 2(x-1)^2 \end{aligned}$$

b) **En este caso:**

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 &= x^2(x^2 - 4) = x^2(x-2)(x+2) \\ x^3 - 4x^2 + 4x &= x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2 \end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$\begin{aligned} mcd(x^4 - 4x^2, x^3 - 4x^2 + 4x) &= x(x-2) \\ mcm(x^4 - 4x^2, x^3 - 4x^2 + 4x) &= x^2(x-2)^2(x+2) \end{aligned}$$

c) **Factorizando cada polinomio se obtiene que:**

$$x^2 - 3x = x(x-3)$$
$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$
$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

Así pues, concluimos que

$$mcd(x^2 - 3x, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9) = (x-3)$$
$$mcm(x^2 - 3x, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2(x+3)$$

9. Determina dos polinomios cuyo máximo común divisor sea $x(x+1)$ y cuyo mínimo común múltiplo sea $x^3(x^2-1)(x^2+1)$.

   Podemos tomar, por ejemplo, $P(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ **y** $Q(x) = x^3(x+1)(x^2+1) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3$

10. Efectua las operaciones y simplifica las fracciones obtenidas:

    a) $\dfrac{x+7}{x} + \dfrac{x-2}{x^2+x} - \dfrac{2x+1}{x+1}$

    b) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x}$

    c) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} : \dfrac{x^2-1}{x}$

    Para sumar reducimos a común denominador:

    a) $\dfrac{x+7}{x} + \dfrac{x-2}{x^2+x} - \dfrac{2x+1}{x+1} = \dfrac{(x+7)(x+1)+x-2-x(2x+1)}{x^2+x} = \dfrac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$

    b) **Para multiplicar, basta multiplicar los numeradores y los denominadores** $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{(x+1)(x^2-1)}{(x-1)^2 x} = \dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

    c) **Para dividir, multiplicamos la primera fracción por la inversa de la segunda** $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} : \dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{x(x+1)}{(x-1)^2(x-1)(x+1)} = \dfrac{x}{(x-1)^3}$

11. Efectua las operaciones indicadas y simplifica las fracciones obtenidas:

    a) $\left(\dfrac{4x}{(x-1)^2} - \dfrac{4}{x-1}\right) : \dfrac{x}{x^2-1}$

    b) $\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}\right)$

    c) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$

d) $\left(\frac{2a-b}{2a+b}-\frac{2a+b}{2a-b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{4a}\right)$

a)

$$\left(\frac{4x}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-1}\right):\frac{x}{x^2-1}=\frac{4x-4(x-1)}{(x-1)^2}:\frac{x}{x^2-1}=\frac{4(x^2-1)}{x(x-1)^2}=\frac{4(x+1)}{x(x-1)}.$$

b)

$$\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{3}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)=\frac{9-x^2}{3x}:\frac{3+x}{3x}=\frac{(3-x)(3+x)3x}{3x(x+3)}=3-x.$$

c)

$$\begin{aligned}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1) &= \left[\frac{x^2+1}{x}:\frac{x^2-1}{x}\right]\cdot(x-1)\\ &= \frac{(x^2+1)x}{x(x^2-1)}\cdot(x-1)\\ &= \frac{x^2+1}{x+1}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\left(\frac{2a-b}{2a+b}-\frac{2a+b}{2a-b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{4a}\right) &= \left(\frac{(2a-b)^2-(2a+b)^2}{(2a+b)(2a-b)}\right)\cdot\left(\frac{4a^2-b^2}{4ab}\right)=\\ &= \frac{(4a^2-4ab+b^2-4a^2-4ab-b^2)(4a^2-b^2)}{(4a^2-b^2)4ab}\\ &= -2.\end{aligned}$$

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}=0$

b) $\frac{1-x}{x+3}+\frac{2x}{x-2}=\frac{x^2+5(x-2)}{x^2+x-6}$

a)

$$\begin{aligned}&\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}=0 &\Leftrightarrow\\ &\frac{(x+1)^2+3(x-1)-x+2}{x^2-1}=0 &\Leftrightarrow\\ &\frac{x^2+2x+1+3x-3-x+2}{x^2-1}=0 &\Leftrightarrow\\ &x^2+4x=0 &\Leftrightarrow\\ &x=0\vee x=-4\end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{1-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-2}=\dfrac{x^2+5(x-2)}{x^2+x-6} & \Leftrightarrow \\
\dfrac{(1-x)(x-2)+2x(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{x^2+5(x-2)}{(x+3)(x-2)} & \Leftrightarrow \\
-x^2+3x-2+2x^2+6x=x^2+5x-10 & \Leftrightarrow \\
4x=-8 & \Leftrightarrow \\
x=-2 &
\end{array}$$

13. Sea $a \in \mathbb{R}$ un número real tal que $a^3+2a^2+10a=20$. Demuestra que a y a^2 son irracionales.

Sea $a \in \mathbb{R}$ **una raíz de** $P(x) = x^3+2x^2+10x-20$. **Si** $a = {}^{c}\!/_{d}$ **es racional, sabemos que** $c \mid 20$**, es decir,** $c = \pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$**.**

Pero, se tiene que $P(-1)=-29, P(1)=-7, P(-2)=-40, P(2)=16, P(-4)=-92, P(4)=116, P(-5)=-145, P(5)=205, P(-10)=-920, P(10)=1280, P(-20)=-7420, P(20)=8980$**. Por lo tanto,** a **es irracional.**

Si ahora suponemos que a^2 **es racional, entonces** $a^2 = {}^{c}\!/_{d}$**, para ciertos enteros** c **y** d**, con lo que substituyendo en** $a^3+2a^2+10a=20$**, nos quedaría:**

$$a \cdot {}^{c}\!/_{d} + 2\,{}^{c}\!/_{d} + 10a = 20,$$

es decir:

$$a\,({}^{c}\!/_{d}+10) = 20 - {}^{2c}\!/_{d}$$

o

$$a = \frac{20 - {}^{2c}\!/_{d}}{({}^{c}\!/_{d}+10)} \in \mathbb{Q}.$$

Por lo tanto, tanto a **como** a^2 **son irracionales.**