

Ejercicios Resueltos del Tema 3

1. Demuestra, mediante inducción que:

- a) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
 b) $\sum_{i=1}^n 2(3^{i-1}) = 3^n - 1$

Utilizaremos el método de inducción.

- a) ■ **Base Inductiva:**
 $n = 1.$

Es trivial ya que

$$1^1 = 1 = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) (2 \cdot 1 + 1)}{3}$$

- **Paso Inductivo**
 $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$

Si suponemos que:

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},$$

entonces:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \cdots + (2(n+1)-1)^2 &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\ &= \frac{(2n+1) [2n^2 - n + 6n + 3]}{3} \\ &= \frac{(n+1)(2n+3)(2n+1)}{3}. \end{aligned}$$

- b) ■ **Base Inductiva:**
 $n = 1.$

Es trivial ya que

$$2 \cdot 3^0 = 2 = 3^1 - 1$$

- **Paso Inductivo**
 $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$

Si suponemos que:

$$\sum_{i=1}^n 2(3^{i-1}) = 3^n - 1,$$

entonces:

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2(3^{i-1}) = \sum_{i=1}^n 2(3^{i-1}) + 2 \cdot 3^n = 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n = 3 \cdot 3^n - 1 = 3^{n+1} - 1.$$

2. Sean p y q dos números primos, demuestra que $p \mid q$ si, y sólo si, $p = q$.

Si p y q son dos primos tales que $p \mid q$, entonces $p = 1$ o $p = q$. Como p es primo, excluimos el caso $p = 1$, con lo que $p = q$.

3. Sean a, b y c tres números enteros tales que $a \mid bc$, ¿ es cierto que $a \mid b$ o que $a \mid c$? ¿ Y si a es primo? Justifica tus respuestas.

Si a es cualquier entero, la respuesta es que no. Basta tomar $a = 6$, $b = 10$ y $c = 15$. Se tiene que $6 \mid 150$ pero 6 no es un divisor de 10 ni de 15. Si a es primo, sí se verifica ya que, en ese caso el máximo común divisor $\text{mcd}(a, b)$ es 1 o a , que son los únicos divisores positivos que tiene a . Si $\text{mcd}(b, a) = 1$, entonces $1 = bx + ay$ (para ciertos enteros x, y) y $c = bxc + ayc = aqx + ayc$ (si $bc = aq$), con lo que $a \mid c$. Por otro lado, si $\text{mcd}(b, a) = a$, entonces $a \mid b$.

4. Demuestra que, para todo n natural, $3 \mid 7^n - 4^n$.

Utilizaremos el método de inducción.

▪ **Base Inductiva:**

$$n = 1$$

Es trivial ya que

$$7^1 - 4^1 = 3$$

▪ **Paso Inductivo**

$$(P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

Si suponemos que:

$$7^n - 4^n = 3 \cdot q$$

entonces:

$$7^{n+1} - 4^{n+1} = 7^n \cdot 7 - 4^n \cdot 4 = 7^n(4+3) - 4^n \cdot 4 = 4(7^n - 4^n) + 3 \cdot 7^n = 3(4q + 7^n)$$

que es un múltiplo de 3.

5. Escribe los siguientes números racionales en forma de fracción: $2'\hat{3}$, $2'\hat{1}\hat{3}$, $5'34\hat{5}$ y $5'43\hat{5}\hat{6}$

- **Sea $x = 2'\hat{3}$, entonces $10x = 23'\hat{3}$ y $9x = 23'\hat{3} - 2'\hat{3} = 21$, con lo que $x = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$**
- **Sea $x = 2'\hat{1}\hat{3}$, entonces $100x = 213'\hat{1}\hat{3}$ y $99x = 213'\hat{1}\hat{3} - 2'\hat{1}\hat{3} = 211$, con lo que $x = \frac{211}{99}$**

- Sea $x = 5'34\hat{3}$, entonces $100x = 534'\hat{3}$, $1000x = 5343'\hat{3}$ y $900x = 5343'\hat{3} - 534'\hat{3}$, con lo que $x = \frac{4811}{900}$.
- Sea $x = 5'435\hat{6}$, entonces $100x = 543'5\hat{6}$, $10000x = 54356'\hat{56}$ y $9900x = 54356'\hat{56} - 543'\hat{56}$ con lo que $x = \frac{53813}{9900}$.

6. Demuestra que, si p es un número primo, $\sqrt{p}$ es irracional.

Supongamos que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$ y, por lo tanto, existen m, n naturales tales que $\text{mcd}(m, n) = 1$ y

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n}.$$

Como, al elevar al cuadrado, obtenemos que $m^2 = p \cdot n^2$, se deduce que $p \mid m^2$ y, como p es primo, se tiene que $p \mid m$ (lo hemos visto en el ejercicio 3), es decir $m = p \cdot q$. Sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene que $p^2 \cdot q^2 = p \cdot n^2$, con lo que $p \cdot q^2 = n^2$, es decir $p \mid n^2$ y, de nuevo $p \mid n$. Hemos llegado a una contradicción porque entonces $\text{mcd}(m, n) \neq 1$ al haber demostrado que p es un divisor común de

m y n .

7. Dados los siguientes números, indica cuál es el menor de los conjuntos de números (entre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$) que lo contiene: -3 , 2 , $\sqrt{4}$, $\frac{-10}{2}$, $\frac{8}{9}$, $1'42$, $0'45\hat{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{-8}$, π .

Tenemos que $-3 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$ (o $\sqrt{4} = -2 \in \mathbb{Z}$), $\frac{-10}{2} = -5 \in \mathbb{Z}$, $\frac{8}{9} \in \mathbb{Q}$, $1'42 \in \mathbb{Q}$, $0'45\hat{4} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{Z}$ y $\pi \in \mathbb{R}$.

8. Si $A = (1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ y $B = (2, 3) \subseteq \mathbb{R}$, determina $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$ y $\overline{\overline{A \cup B}}$.

Empezamos calculando

$$\overline{A} = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty) \text{ y } \overline{B} = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty).$$

Para determinar

$\overline{A \cup B}$, podemos proceder hallando primero $A \cup B = (1, 3)$ y luego $\overline{A \cup B} = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$. Otra forma sería hallar $\overline{A \cap B} = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

Hallemos ahora

$$\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\emptyset} = \mathbb{R} \text{ y, finalmente } \overline{A \cup B} = \overline{\overline{A \cap B}} = \mathbb{R}.$$

9. Dados los intervalos:

$$A = \{x \in \mathbb{R}; -10 \leq x < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{2} < x \leq 3\} \text{ y } C = \mathbb{R} - (1, 2)$$

determina $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cap C) \cup B$, $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$.

Se puede comprobar fácilmente que

- $A \cup B = [-10, 3]$
- $A \cap B = (\frac{1}{2}, 1)$
- $A \cup C = C$ **ya que** $A \subseteq C$
- $(A \cap C) \cup B = A \cup B = [-10, 3]$
- $A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = C \cup B = \mathbb{R}$
- $A \cap B \cap C = A \cap C \cap B = A \cap B = (\frac{1}{2}, 1)$.

10. Demuestra que si θ es un ángulo cualquiera y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot i)^n = \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\theta) \cdot i$ (Fórmula de Moivre)

Demostremoslo por inducción en n .

▪ **Base Inductiva:**

$$n = 1$$

Es trivial

▪ **Paso Inductivo**

$$(P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

Si suponemos que:

$$(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot i)^n = \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\theta) \cdot i,$$

entonces:

$$\begin{aligned} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot i)^{n+1} &= (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot i)^n (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot i) \\ &= (\cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\theta) \cdot i) (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot i) \\ &= \cos((n+1)\theta) + \operatorname{sen}((n+1)\theta) \cdot i. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene aplicando las fórmulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen}(A)\cos(B) + \cos(A)\operatorname{sen}(B) \\ \cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) \end{aligned}$$

para determinar

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= \cos(n\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}((n+1)\theta) &= \operatorname{sen}(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

11. Resuelve en $\mathbb{C}$ la ecuación $x^2 - \bar{x} = 0$.

Llamemos $x = a + b \cdot i$. La ecuación dice entonces que

$$(a + b \cdot i)(a + b \cdot i) = a - b \cdot i,$$

es decir:

$$(a^2 - b^2) + 2ab \cdot i = a - b \cdot i,$$

con lo que, igualando la parte real y la parte imaginaria, nos queda:

$$a^2 - b^2 = a \quad \text{y} \quad 2ab = -b.$$

Podemos suponer, en primer lugar que $b = 0$, con lo que necesariamente $a^2 = a$, es decir, $a = 0$ o $a = 1$. Las dos primeras soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

Si ahora tomamos $b \neq 0$, entonces $a = -1/2$. De este modo, se tiene que $1/4 - b^2 = -1/2$ o $b^2 = 3/4$. Tomando $b = \pm \sqrt{3}/2$, se obtienen las otras dos soluciones que vienen dadas por:

$$\begin{aligned} x_3 &= -1/2 + \sqrt{3}/2 \cdot i = 1 / \underline{2\pi/3} \\ x_4 &= -1/2 - \sqrt{3}/2 \cdot i = 1 / \underline{4\pi/3} \end{aligned}$$

12. Calcula $(1+i)^7 + 4(1+i)^3$.

Pongamos $1+i$ en forma polar. Está claro que $1+i = \sqrt{2} / \underline{\pi/4}$. De este modo:

$$(1+i)^3 = \sqrt{2^3} / \underline{3\pi/4} = 2\sqrt{2} / \underline{3\pi/4},$$

y

$$(1+i)^7 = \sqrt{2^7} / \underline{7\pi/4} = 8\sqrt{2} / \underline{7\pi/4}.$$

Puesto que $\cos(3\pi/4) = -1$, $\sin(3\pi/4) = 1$, $\cos(7\pi/4) = 1$ y $\sin(7\pi/4) = -1$, se deduce que:

$$(1+i)^7 + 4(1+i)^3 = 8\sqrt{2}(1-i) + 8\sqrt{2}(-1+i) = 0.$$

13. Sabiendo que α y β son dos números complejos tales que $\frac{(\alpha+\beta)i}{\alpha-\beta}$ es un número real, determina la relación que existe entre α y β .

Supongamos que $\alpha = a + b \cdot i$ y que $\beta = c + d \cdot i$. Puesto que:

$$(\alpha + \beta) \cdot i = -(b + d) + (a + c) \cdot i,$$

y,

$$(\alpha - \beta) = (a - c) + (b - d) \cdot i,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\alpha + \beta) \cdot i}{(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{((\alpha + \beta) \cdot i) \overline{(\alpha - \beta)}}{(\alpha - \beta) \overline{(\alpha - \beta)}} \\ &= \frac{[-(b + d) + (a + c) \cdot i] [(a - c) + (b - d) \cdot i]}{(a - c)^2 + (b - d)^2} \\ &= \frac{[(c - a)(b + d) + (b - d)(a + c)] [(b - d)(b + d) + (a + c)(a - c)] \cdot i}{(a - c)^2 + (b - d)^2}. \end{aligned}$$

Así pues, $z \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, su parte imaginaria es nula, es decir:

$$\begin{aligned} (b - d)(b + d) + (a + c)(a - c) &= 0 && \Leftrightarrow \\ b^2 - d^2 + a^2 - c^2 &= 0 && \Leftrightarrow \\ a^2 + b^2 &= c^2 + d^2, \end{aligned}$$

lo cual significa que $|\alpha| = |\beta|$.