19. PROBLEMAS DE V. ALEATORIAS

1.- La vida útil de un aparato, es una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{25}x & \text{si} \quad 0 < x < 5 \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0,5) \end{cases}$$

Dicha marca ofrece una garantía de año y medio, de modo que si el aparato falla en ese período habrá que reemplazarlo por otro nuevo.

a) Probabilidad de que haya que reemplazar un aparato en el período de garantía.

b) Si en una fábrica se han recibido 10 de estos aparatos, determinar la probabilidad de que al menos uno de ellos se averíe en el período de garantía.

Solución:

a)

$$P(X < 1'5) = \int_0^{1.5} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{25}x \right) dx = \ 0'51$$

b) Sea $A_i =$ "*el aparato i se avería dentro del período de garantía*"

$$P(A_i) = 0'51 \Rightarrow P(\overline{A}_i) = 0'49$$

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{10}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}}) = 1 - 0'49^{10} = 0'9992$$

2.- Una factoría tiene que elegir entre dos procesos para la fabricación de pernos, cuya longitud sigue una distribución continua, con funciones de densidad dadas por f y g para el proceso 1 y el proceso 2, respectivamente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^5} & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Si sólo se aceptan pernos con longitudes entre $1'1$ y 2 cm.

¿Qué proceso produce mayor porcentaje de pernos buenos?

Solución:

Sean $X_i =$ "pernos producidos con el proceso i"

$$P(1'1 < X_1 < 2) = \int_{1'1}^{2} \frac{3}{x^4} dx = 0'62631$$
$$P(1'1 < X_2 < 2) = \int_{1'1}^{2} \frac{4}{x^5} dx = 0'62051$$

Dado que: $0'62051 < 0'62631$, el porcentaje de aceptables es mayor con el proceso 1.

3.- La variable X representa el tiempo de duración, en minutos, de la conexión a un buscador de Internet y tiene por densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2}) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcular la probabilidad de que el tiempo esté entre 5 y 10 minutos.
b) Hallar la media de la variable X.
Solución:
a)

$$P(5 \leq X \leq 10) = \int_5^{10} \frac{1}{2} \exp(-\frac{x}{2}) dx = 0'0753$$

b) La media es

$$\int_0^\infty x\frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2})dx = 2$$

4.- Una variable aleatoria tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(x-8)(9-x) & \text{si} \quad 8 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [8,9] \end{cases}$$

a) Calcula el valor de la constante k.
b) Calcula P($8'1 \leq X \leq 9$)
Solución:
a) Está claro que para valores x tales que $8 \leq x \leq 9, \quad f(x) \geq 0$, si $k \geq 0$

$$1 = \int_8^9 k(x-8)(9-x)dx = \frac{k}{6} \Leftrightarrow k = 6$$

b) La probabilidad pedida es

$$P(8'1 \leq X \leq 9) = \int_{8'1}^{9} 6(x-8)(9-x)dx = 0'972$$

5.- Una variable aleatoria continua tiene por función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0'2\exp(-\frac{x}{5}) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Calcular $P(X \geq 30)$.

Solución:

La probabilidad pedida es:

$$P(X \geq 30) = \int_{30}^{\infty} 0'2\exp(-\frac{x}{5})dx = 0'000432$$

6.- Las longitudes, en cm, de unos determinadas tornillos siguen una variable aleatoria con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{45-x}{900} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0,30] \end{cases}$$

hallar la probabilidad de que elegido uno de estos tornillos su longitud sea menor de 10 cm.

Solución:

$$P(A) = \int_{0}^{10} \frac{45-x}{900}dx = \frac{4}{9}$$

7.- Una variable aleatoria continua tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Calcular su media o esperanza.

Solución:

$$E(T) = \int xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{3}\ dx = 3 \text{ años.}$$

8.- Se tira una moneda no trucada al aire 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 6 caras y 4 cruces?

Solución:

El número de caras X sigue una distribución binomial, $X \in B(10, 1/2)$

Por tanto:

$$P(X=6)=\left(\begin{array}{c}10\\6\end{array}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=00205$$

9.- Se eligen al azar, con reemplazamiento, 10 personas en una población en el que el 15% son analfabetos, ¿cuál es la probabilidad de que en la muestra elegida haya al menos un analfabeto?

Solución:

El número de analfabetos en la muestra es una variable aleatoria binomial $X\in B(10,0.15)$

Se pide

$$\begin{aligned}P(X &\geq 1)=1-P(X=0)=1-\left(\begin{array}{c}10\\0\end{array}\right)0.15^0 0.85^{10}\\ &= 1-0.85^{10}=0.80313\end{aligned}$$

Obsérvese como en estos casos es más sencillo calcular el suceso contrario. En este caso lo contrario a que tengamos por lo menos un analfabeto en la muestra es que no haya ninguno es decir $P(X=0)$.

10.- La altura de las alumnas de una Universidad se distribuye de forma normal con media 175 cm y desviación típica 8 cm. Elegida una de estas alumnas al azar, cuál es la probabilidad de que su talla esté entre 170 y 180 cm.

Solución:

$$P(170<X<180)=P\left(\frac{170-175}{8}<Z<\frac{180-175}{8}\right)=0.388^*$$

11.- Se ha estimado que el coeficiente de inteligencia de los alumnos de ingeniería se ajusta a una distribución normal con media 120 y desviación típica 35. Elegido uno de estes alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su coeficiente sea superior a 90?

Solución:

$$P(X>90)=P\left(Z>\frac{90-120}{35}\right)=P(Z>-0.85)=0.8023^*$$

12.- Se ha estimado que el 40% de los alumnos de una Universidad hacen uso del progrma de enseñanza virtual. Suponiendo que un determinado curso hay 10000 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que más de 4100 alumnos accedan a dicha enseñanza?

Solución:

El número de alumnos que acceden a dicha enseñanza es una variable binomial $B(10000, 0.4)$ que se puede aproximar a una normal:

$N(10000 \cdot 0.4, \sqrt{10000 \cdot 0.4 \cdot 0.6}) = N\,(4000, 48.99)$

Por tanto la probabilidad pedida resulta:

$$P(X > 4500) = P\left(Z > \frac{4100 - 4000}{48.99}\right) = P(Z > 2.04) = 0.0207^{*}$$

(*) Estos valores se han obtenido usando la tabla de la distribución Normal.