EJERCICIOS RESUELTOS

1.- ¿La ecuación $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{-3}$ representa una recta?

Solución:

Si. La ecuación representa la recta que pasa por el punto P (2, -1, 3) y es paralela al vector $\vec{v}=(2,0,-3)$. Podríamos escribir las ecuaciones como *y =-1* e $\frac{x-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$.

2.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2,3) y es paralela a la recta

$$r:\begin{cases}2x+3y-z=-1\\ x-y+3z=4\end{cases}$$

Solución:

La recta que queremos determinar por ser paralela a la dada tiene el mismo vector director. Calculemos la ecuación continua de la recta dada:

Haciendo z = t y resolviendo el sistema de ecuaciones: $\begin{cases}2x+3y=t-1\\ x-y=-3t+4\end{cases}$ obtenemos la ecuación paramétrica de la recta r. $x=\frac{11}{5}-\frac{8}{5}t \quad y=\frac{-9}{5}+\frac{7}{5}t \quad z=t$

Por lo tato su vector director es: $\vec{v}=(-8,7,5)$

Consiguientemente la recta paralela a r y pasando por P es:

$$s:\frac{x-1}{-8}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-3}{5}$$

3.- Hallar el punto de intersección de la recta $r:\begin{cases}x=2t\\ y=3t+1\\ z=t\end{cases}$ con el plano $3x+2y-11z-5=0$

Solución:

Sustituyendo las expresiones de x, y, z en la ecuación del plano, se tiene

$$6t+2(3t+1)-11t-5=0 \Leftrightarrow t=3$$

Las coordenadas del punto de intersección son P(6, 10, 3)

4.- Consideremos la recta $r:\begin{cases}5x-y+z=0\\ x-y-z=4\end{cases}$ y el plano $\pi:\ ax-6y+4z=5$

Se pide.

a) Calcular el valor de a para que la recta y el plano sean paralelos
b) Calcular el valor de a para que la recta sea perpendicular al plano

Solución:

Sea $A=\begin{pmatrix}5&-1&1\\1&-1&-1\\a&-6&-1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}5&-1&1&0\\1&-1&-1&4\\a&-6&4&-5\end{pmatrix}$

a) Para que sean paralelos $rango(A)=2\neq rango(A^*)=3$, por lo tanto det(A) =0

$$|A|=\begin{vmatrix}5&-1&1\\1&-1&-1\\a&-6&4\end{vmatrix}=(-20-6+a)-(-a+30-4)=2a-52=0\Rightarrow a=26$$

La recta y el plano son paralelos cuando a = 26

b)

Para que sean perpendiculares el vector director de la recta y el vector normal al plano han de ser proporcionales, es decir:

$$(a,-6,4)=\alpha(1,3,-2)\Rightarrow -6=3\alpha \quad y \quad a=\alpha\Rightarrow a=-2$$

5.- Estudiar la posición relativa dela recta $r:\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = t+2 \\ z = 2t \end{cases}$ y el plano determinado por los puntos A(1,3,2), B(2,0,1) y C(1,4,3).

Solución: La ecuación del plano determinado por los puntos A, B y C es

$$\det(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x+y-z-3=0$$

Reemplazando los puntos de la recta en el plano, tenemos

$2(3t-1)+t+2-2t-3=0 \Leftrightarrow 5t=3 \Leftrightarrow t=\frac{3}{5}$. En este caso, la recta y el plano se cortan en el punto $P\left(\frac{4}{5},\frac{13}{5},\frac{6}{5}\right)$.

6.-¿ Para qué valor de a son paralelas las rectas:

$r:\begin{cases} 4x+5y+2z-3=0 \\ x+3y+4z-5=0 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} 5x+y+2az-7=0 \\ 10x+9y+\frac{1}{2}z+9=0 \end{cases}$?

Solución: <u>Método matricial</u>: el rango de A debe ser 2 y el de A* tiene que ser 3, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2a \\ 10 & 9 & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2a & 7 \\ 10 & 9 & \frac{a}{2} & -9 \end{pmatrix}$$

Tomemos un menor de orden 2x2, por ejemplo $M=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow$ las dos primeras ecuaciones definen una recta. Puesto que:

$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 14(a+4)=0 \Leftrightarrow a=-4$ y $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 10 & 9 & a/2 \end{vmatrix} = \frac{7}{2}(a+4)=0 \Leftrightarrow a=-4$

se tiene que rango(A)= 2 si y solo si a = -4. Por otro lado:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A')=3$$

Por lo tanto son paralelas no coincidentes para a = -4.

<u>Método vectorial:</u>

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 14\,\vec{i} - 14\,\vec{j} + 7\,\vec{k} \Rightarrow (2,-2,1) \parallel r$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 2a \\ 10 & 9 & \frac{a}{2} \end{vmatrix} = -\frac{35a}{2}\ \vec{i} + \frac{35a}{2}\ \vec{j} + 35\ \vec{k} \Rightarrow (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 1) \parallel s$$

Por lo tanto para que r y s sean paralelas, sus vectores directores tiene que ser el mismo o proporcionales, lo cual se consigue si y solo si a = -4.

7.- Estudiar la posición relativa de los cuatro planos: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + bz = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ ax - 2y + z = -3 \end{cases}$

Solución:

Estudiar la posición relativa de los cuatro planos equivale a estudiar las soluciones del sistema.

Las matrices de los coeficientes del sistema (A) y la ampliada (A*) son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & b \\ 2 & -2 & 1 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & b & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ a & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A*:

$$\det(A^*) = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & b & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ a & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 - F_2 \\ F_4 + 3F_2}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & b & 1 \\ 3 & -3 & 1-b & 0 \\ a-3 & 1 & 1+3b & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1-b \\ a-3 & 1 & 1+3b \end{pmatrix} = 2ab + a + 4b + 2 = (a+2)(2b+1)$$

1^er^ CASO: $a \neq -2$ y $b \neq \frac{-1}{2}$

rango de A = 3 y rango de A* = 4. Sistema incompatible.
Los planos no tiene ningún punto en común

2º CASO:

- $a = -2$ y $b \neq \frac{-1}{2}$

  rango A = 3 = rango A* . Sistema compatible.
  Los planos tiene un punto común

- $a = -2$ y $b = \frac{-1}{2}$

  rango A = 2; rango A* = 3. Sistema incompatible.
  Los planos no tienen ningún punto en común.
  Los planos 2º y 3º son paralelos y los otros los cortan

3^er^ CASO: $a \neq -2$ y $b = \frac{-1}{2}$

rango de A = 2 ; rango A* = 3. Sistema incompatible
Los planos no tienen ningún punto en común.

- Si a =1 , son paralelos los planos 1.º y 4º y también son paralelos los planos 2.º y 3.º
- Si a =2, los planos 2.º , 3.º y 4.º son paralelos y el 1.º los corta.