Tema 3

Los Conjuntos Numéricos

Los números utilizados habitualmente en el Análisis Matemático son los Números Reales y los Números Complejos[1]. Pero estos dos sistemas de numeración se apoyan en otros más básicos con los que comparten algunas de sus propiedades fundamentales. Estos sistemas de numeración se contienen unos a otros de forma sucesiva, de manera que los Números Complejos contienen a todos los demás. Haremos, en esta sección, una breve descripción de los distintos sistemas numéricos con los que trabajaremos.

3.1. Los números Naturales

Los números naturales surgen de la necesidad de contar. Para realizar el proceso de contar se necesita disponer de un conjunto de números que posean un par de cualidades simples, como son la existencia de un número inicial y la posibilidad de establecer un orden que permita determinar cuál es el siguiente número de un número dado del conjunto.

De esta forma, partiremos de un concepto primitivo de números, que llamaremos *números naturales*, y que representaremos como $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Estos números naturales constituyen un conjunto que denotaremos por $\mathbb{N}$, y que llamaremos *conjunto de los números naturales*. Al primer número natural se le denota por 0 ("cero"), y es el menor de todos ellos.[2] Intuitivamente se comprende que los números naturales están ordenados[3], de manera que siempre es posible encontrar un número natural más grande que uno dado. De hecho, a la aplicación que asigna a un número natural n

[1] Sin embargo, en otras áreas de las Matemáticas, como la Matemática Discreta, de reciente expansión, son los sistemas de números naturales y enteros los que juegan un papel relevante.

[2] Hay autores que consideran el 1 ("uno") como el primero de los naturales.

[3] Se puede definir en el conjunto de los números naturales una relación de orden total ($\leq$)

el inmediatamente superior se le llama *aplicación siguiente*:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\to \varphi(n) = n+1 \end{aligned}$$

Esta aplicación verifica que su imagen $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{0\}$, es decir, el 0 no es " siguiente"de ningún otro natural y, todo natural distinto de 0 es el siguiente de otro.

En la figura 3.1 se muestra cómo ésta aplicación relaciona los primeros números naturales.

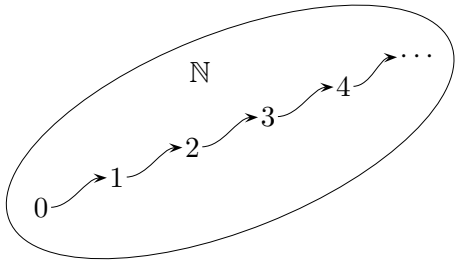

Figura 3.1: Aplicación *siguiente* en $\mathbb{N}$.

3.1.1. Principio de Inducción

En $\mathbb{N}$ se pueden definir dos operaciones internas suma + y producto ., verificándose que la suma es asociativa y commutativa, con elemento neutro 0, y que el producto es asociativo, commutativo y con elemento neutro (1). La relación de orden "$\leq$" convierte a $\mathbb{N}$ en un conjunto bien ordenado, es decir, todo subconjunto F no vacío de números naturales tiene un mínimo $k \in F$, es decir $f \geq k$, para todo $f \in F$.

Este principio del buen orden es equivalente al llamado *Principio de inducción* que afirma, que si $P(n)$ es una propiedad definida en $\mathbb{N}$ de modo que

- **Base Inductiva** $P(1)$ es cierta (el 1 verifica la propiedad P)
- **Paso Inductivo** Siempre que $P(n)$ es cierta, se puede demostrar $P(n+1)$

entonces cualquier natural n verifica la propiedad.

Hay otras versiones equivalentes del mismo principio[4].

Ejemplo 3. *1.* $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $n! \leq n^n$

[4]Por ejemplo, puede tomarse como base inductiva el 0 o cualquier número natural n_0.

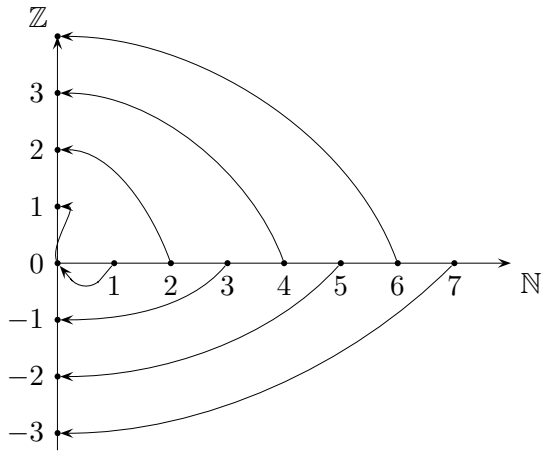

Figura 3.2: Representación gráfica de la aplicación $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

3.2. Los números Enteros

Los números enteros surgen como extensión lógica de los naturales cuando se necesita considerar cantidades negativas, es decir, ante la imposibilidad de resolver en $\mathbb{N}$ la ecuación $x + 1 = 0$. Esta necesidad se evidencia con la operación *resta*, que resulta una operación externa en el conjunto de los números naturales. Denotaremos al conjunto de los números enteros mediante la letra $\mathbb{Z}$.

Una manera habitual de introducir los números enteros es definir en $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación de equivalencia:

$$(a, b)\ R\ (c, d) \ \Leftrightarrow\ a + d = b + c$$

El conjunto cociente X/R es $\mathbb{Z}$. Los enteros $[(a, b)]$ con $b \leq a$ (la relación de orden es la de $\mathbb{N}$) se llaman enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$) y si, $a < b$ se dice que $[(a, b)]$ es un entero negativo ($\mathbb{Z}^-$). Es claro que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$. Identificando los naturales con los enteros positivos ($n = [(n, 0)]$), se tiene que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Es posible establecer una aplicación biyectiva entre los números naturales y los enteros, que caracteriza a éstos; esta aplicación es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longrightarrow & \gamma(n) = \begin{cases} (n/2) + 1 & , \quad \text{si } n \text{ es par} \\ -(n-1)/2 & , \quad \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{array}$$

En la figura 3.2 se muestra un diagrama en el que se aprecia el funcionamiento de esta aplicación. Los naturales pares son asignados a los enteros positivos, y los naturales impares a los enteros negativos (el 0 se considera, aquí, número par). Es evidente, a la vista de la figura, que esta aplicación no tiene por qué ser única. Bastaría, por ejemplo, con asignar los

naturales pares a los enteros impares, y viceversa, para formar otra aplicación biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

Por otro lado, como dado un entero a, se tiene que a o $-a$ es un número natural, la aplicación:

$$\begin{array}{rl} |\quad| : \mathbb{Z} & \to \mathbb{N} \\ a & \to |a| \end{array}$$

se llama *valor absoluto* y verifica las propiedades siguientes:

- $a = max(a, -a)$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a.b| = |a|.|b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad triangular)
- $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$

3.2.1. Divisibilidad de números enteros

Definición 47. *Dados dos números enteros, a y b, se dice que a* divide a *b si existe un entero c tal que $b = ac$. Esta situación se denota $a|b$ y también se dirá que a es un divisor o factor de b, b es un múltiplo de a o b es divisible por a.*

Ejemplo 32. *Está claro que 1 y n son divisores de cualquier entero n. Además a divide a b si, y sólo si, $-a$ divide a b. Por ello, muchas veces nos referiremos únicamente a los divisores positivos de b.*

En general, si a y b son dos enteros y $b \neq 0$, existen enteros únicos q y r tales que $a = bq + r$ con $0 \leq r < |b|$. Cuando $r = 0$, se dice que la división es exacta y tenemos que b divide a a. Se dice que a es el *dividendo*, b es el *divisor*, q es el *cociente* y r es el *resto*.

Los números naturales $p > 1$ que, como, $2, 3, 5$ y 7 sólo tienen como divisores positivos a 1 y p, se llaman *primos*. Los demás se denominan *compuestos*. Al estudio de los números primos se han dedicado, desde muy antiguo, numerosos matemáticos.

Teorema 2. *Cualquier número natural $n \neq 0, n \neq 1$ se puede descomponer en el producto de potencias de primos distintos, es decir, para cualquier número natural $n \neq 0$, existen primos distintos $p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_r$ y naturales $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, tales que*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

El teorema anterior se conoce con el nombre de Teorema Fundamental de la Aritmética. Actualmente no se dispone de algoritmos computacionalmente eficientes que permitan factorizar un número natural suficientemente grande. Tampoco se puede asegurar que un algoritmo de este tipo no pueda ser encontrado en el futuro. Precisamente en este hecho, se basa la seguridad de los sistemas criptográficos de clave pública que se utilizan actualmente para el envío de mensajes privados (como el RSA).

Dados dos enteros a y b, se llama *máximo común divisor* (en adelante *m.c.d.*) de a y b al mayor de los divisores comunes de a y b. Análogamente, se llama *mínimo común múltiplo* (en adelante *m.c.m.*) de a y b al menor de los múltiplos comunes de a y b. Si disponemos de la factorización en primos de a y b, es fácil comprobar que el $m.c.d.(a,b)$ es el producto de los factores comunes elevados al menor exponente y el $m.c.m(a,b)$ es es el producto de los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente. Cuando a y b solo tienen un factor en común (es decir, $m.c.d.(a,b) = 1$), se dice que son *primos entre sí*. Es evidente que

$$m.c.m.(a,b) \quad m.c.d.(a,b) = |a.b|,$$

para cualquier par de números enteros no nulos a y b.

Ejemplo 33. *Tenemos una cartulina roja de* $180cm^2$ *y una blanca de* $336cm^2$ *de área respectivamente; se quieren cortar en trozos de la misma superficie para hacer tarjetas de visita. Si no deseamos desperdiciar cartulina, ¿cuál será el área máxima de estas tarjetas? ¿Cuántas podremos hacer de cada color?*

Puesto que el área de cada tarjeta ha de ser un divisor de 180 ***y de*** 336***, la superficie máxima de la que hablamos es de:***

$$m.c.d(180,336) = 2^2 \cdot 3 = 12cm^2$$

ya que

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad 336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$$

Además, podremos hacer 15 ***tarjetas rojas y*** 28 ***tarjetas blancas.***

Ejemplo 34. *En el pazo de Fefiñanes, el fantasma de la Condesa aparece cada 120 años y el del conde cada 180. Si aparecieron juntos en el año 2000, ¿cuándo volverán a coincidir?*

Volverán a coincidir en cada múltiplo común de 120 ***y*** 180***, la primera vez será, por lo tanto, en el*** 2360 ***ya que***

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

y

$$m.c.m(120,180) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Dado que, no se conocen métodos eficaces para encontrar la factorización de a y b, en la práctica se utiliza el *Algoritmo de Euclides* para el cálculo del máximo común divisor. Este algoritmo se basa en que, si a y b son dos enteros no nulos y el resto de la división de a entre b es r, se verifica

$$m.c.d.(a,b) = m.c.d.(b,r) \tag{3.1}$$

Veámos un ejemplo del funcionamiento de dicho algoritmo.

Ejemplo 35. *Queremos calcular* $m.c.d(480, 372)$. *Aplicamos reiteradamente el resultado 3.1 y recogemos en una tabla los cocientes y restos de las sucesivas divisiones.*

Cocientes	*1*	*3*	*2*	*4*
480	*372*	*108*	*48*	*12*
Restos	*108*	*48*	*12*	*0*

El último resto no nulo, 12*, es el máximo común divisor de* 480 *y* 372.

Es útil saber que si $d = m.c.d.(a,b)$ es el máximo común divisor de a y b, entonces d es el menor entero estrictamente positivo que puede escribirse como combinación lineal de a y b, es decir, existen enteros m y n tales que $d = am + bn$. En consecuencia, si $1 = am + bn$, para ciertos enteros m y n, se tiene que $1 = m.c.d.(a,b)$.

3.3. Los números Racionales

Puesto que, por ejemplo, la ecuación $2x = 1$ no admite solución en el conjunto de los enteros, es necesario definir nuevamente otro conjunto numérico que, conteniendo a todos los enteros, permita resolver ecuaciones como la anterior. A los números de este nuevo conjunto los llamaremos *racionales*, y al conjunto que forman lo denotaremos con la letra $\mathbb{Q}$. Los podemos definir de la siguiente forma.

En $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ definimos la relación de equivalencia dada por:

$$(a,b)\ R\ (c,d) \ \Leftrightarrow\ a.d = b.c$$

El conjunto cociente es $\mathbb{Q}$ y en cada clase de equivalencia podemos tomar un representante canónico $[(m,n)]$, siendo m y n dos enteros (n positivo no nulo) y tales que $m.c.d.(m,n) = 1$. Lo representaremos en forma de fracción:

$$[(m,n)] = \frac{m}{n}$$

Así, se tiene que

$$\frac{-12}{4} = \frac{6}{-2} = \frac{-3}{1} = -3.$$

Queda claro que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ya que, si m es un entero:

$$m = [(m, 1)] = \frac{m}{1}$$

Los números racionales forman un conjunto infinito de números con las siguientes propiedades:

1. Es *totalmente ordenado* $(\forall a, b \in \mathbb{Q}\ ,\ a \neq b,$ es $a > b$ ó $b > a)$. Esta relación de orden es la extensión de la relación de orden de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$. Si $x = \frac{a}{b}$ y $z = \frac{c}{d}$ son dos racionales, se tiene que $x \leq z$ si $a.d \leq b.c$.

2. $\mathbb{Q}$ es *denso* $\left(\forall a, b \in \mathbb{Q}\ ,\ a < b,\ \exists\, c \in \mathbb{Q}\ /\ a < c < b\right)$. El hecho de que el conjunto $\mathbb{Q}$ sea denso significa que entre dos elementos cualquiera de $\mathbb{Q}$ existen infinitos números de $\mathbb{Q}$.

3. $(\mathbb{Q}, +, .)$ es un cuerpo, siendo la suma y el producto las operaciones siguientes:
$$x + z = \frac{ad + bc}{bd}$$
y
$$x.z = \frac{ac}{bd}$$
siendo $x = \frac{a}{b}$ y $z = \frac{c}{d}$ dos números racionales.

4. Todo número racional puede ser representado en forma de fracción decimal (periódica pura o mixta)[5]Un número decimal puede ser periódico puro $(2 = 1'\hat{9})$ o mixto $(1'2343434\ldots = 1'2\widehat{34})$. Para obtener su expresión en forma de fracción, procederemos como en los siguientes ejemplos:

   Ejemplo 36. a) *Tomemos* $x = 8'\hat{3}$. *Puesto que* $10x = 83'\hat{3}$, *tendremos que* $9x = 83'\hat{3} - 8'\hat{3} = 75$ *y, por lo tanto* $x = \frac{75}{9} = \frac{25}{3}$.

   b) *Sea ahora* $x = 7'235656\ldots = 7'23\widehat{56}$. *En este caso, primero lo transformamos en un número decimal periódico puro como el del caso anterior multiplicando por* 100 *y tendremos que* $100x = 723'\widehat{56}$. *Ahora* $10000x = 72356'\widehat{56}$ *y, por lo tanto* $10000x - 100x = 71633$, *con lo que, finalmente* $x = \frac{71633}{9900}$.

3.4. Los números Irracionales

El conjunto de los números racionales, a pesar de ser un conjunto denso e infinito, no contiene todos los números "necesarios". Las "lagunas"que faltan entre los números racionales son ocupadas por los números irracionales. Entre ellos encontramos, a modo de ejemplo, las raíces reales no enteras

[5]Téngase en cuenta que el número 2 y el número $1,999999999\ldots = 1'\hat{9}$ son el mismo.

de la forma $\sqrt[n]{a}$ o *números trascendentes*, como π ó e. Estos números se caracterizan por presentar una expresión decimal no periódica.

La introducción de los números irracionales permite hacer corresponder a cada punto de la recta real (recta donde se representan todos los números reales) un cierto número, haciendo que el conjunto de estos números sea *continuo*.

En particular, son números irracionales las raíces de las ecuaciones binomias $x^n - a = 0$ (los números de la forma $\sqrt[n]{a}$), si éstos no son racionales; por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420 97\ldots$$
$$\sqrt[3]{10} = 2,15443469003188372175929356651 94\ldots$$

en particular si a es un número primo $\sqrt[n]{a}$ es irracional. Los números irracionales que no son soluciones de ecuaciones polinómicas como $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$, con coeficientes enteros se llaman *trascendentes*; por ejemplo:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327 95\ldots$$
$$e = 2,71828182845904523536028747135 27\ldots$$

Muchos valores que resultan de evaluar logaritmos y funciones trigonométricas son, también, ejemplos típicos de números trascendentes.

3.5. Los números Reales

Los números reales reúnen a los racionales e irracionales. Para definirlos supondremos que existe un conjunto $\mathbb{R}$ de elementos, llamados *números reales*, que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación:

Axiomas de cuerpo

1. $x + y = y + x,\ xy = yx,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (propiedad conmutativa)
2. $x+(y+z) = (x+y)+z,\ x\,(yz) = (xy)\,z,\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (propiedad asociativa)
3. $x\,(y+z) = xy + xz,\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (propiedad distributiva)
4. $\exists\, 0, 1 \in \mathbb{R},\ 0 \neq 1 \ /\ 0 + x = x + 0 = x,\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (elementos neutros)
5. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R},\ \exists\, y, z \in \mathbb{R} \ /\ x + y = y + x = 0,\ xz = zx = 1$ (elementos simétricos)

Axiomas de orden

Supondremos que existe un cierto subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado conjunto de números reales positivos, que satisface los tres axiomas de orden siguientes:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ x + y \in \mathbb{R}^+,\ xy \in \mathbb{R}^+$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^+$ ó $-x \in \mathbb{R}^+$
3. $0 \notin \mathbb{R}^+$

Ahora se pueden definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ llamados, respectivamente, *menor que*, *mayor que*, *menor o igual que*, *mayor o igual que*, de la manera siguiente:

$$\begin{array}{lll} x < y & \text{significa} & y - x \in \mathbb{R}^+ \\ x > y & \text{significa} & y < x \\ x \leq y & \text{significa} & x < y \quad \text{ó} \quad x = y \\ x \geq y & \text{significa} & y \leq x \end{array}$$

De estas definiciones se deduce:

1. $x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$
2. Si $x < 0$ se dice que x es *negativo*
3. Si $x \geq 0$ se dice que x es *no negativo*
4. Si $x \leq 0$ se dice que x es *no positivo*

Axioma de completitud

Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un *supremo*, es decir:

$$\forall S \subset \mathbb{R},\ S \neq \emptyset,\ \exists\, b \in \mathbb{R} \ / \ b \geq s,\ \forall s \in S.$$

3.6. Los números Complejos

Nuevamente, el conjunto de los números reales no nos sirve para encontrar todas las soluciones de ecuaciones como $x^{2n} + 1 = 0$. Por ejemplo, para $n = 1$ las soluciones de $x^2 + 1 = 0$ son $\pm\sqrt{-1}$. Estas soluciones no existen en el cuerpo de los números reales. De hecho, no existe ningún número real cuyo cuadrado sea -1, es decir, $\nexists\, x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 = -1$ [6]. La resolución de este tipo de ecuaciones[7] es la que generó el conjunto de los números complejos, que exponemos a continuación:

[6] Esto es consecuencia de los axiomas de $\mathbb{R}$, ya que, si x es un número real, siempre se tiene que $x^2 \geq 0$.

[7] Carl Friedrich Gauss (1777-1855), al demostrar el *teorema fundamental del álgebra* en su tesis doctoral, fue el primero en encontrar la resolución formal de la ecuación algebraica polinómica $x^2 + 1 = 0$. Euler, Newton y Lagrange, entre otros, lo habían intentado previamente sin éxito. Sus resultados sirvieron de base para el desarrollo de la teoría de los números complejos que más tarde haría Cauchy.

Definición 48. *Por* número complejo *entenderemos un par ordenado de números reales, que designaremos por* (a, b)*. La primera componente,* a*, se llama* parte real *del número complejo; la segunda componente,* b*, se llama* parte imaginaria *del número complejo. Designaremos al conjunto de todos los números complejos por* $\mathbb{C}$*.*

Es claro que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, sin más que identificar cada $x \in \mathbb{R}$ con el complejo$[(x, 0)]$.

Los números complejos admiten una representación gráfica en el plano[8] $\mathbb{R}^2$ tomando el par ordenado de valores reales (a, b) que constituyen el número complejo z, y representando la parte real en el eje de abscisas y la parte imaginaria en el de ordenadas. En la figura 3.3 se muestra la representación gráfica del número complejo $z = (2, 1)$.

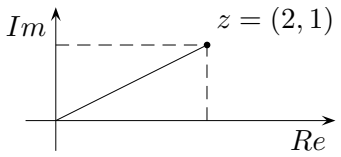

Figura 3.3: Representación gráfica de un número complejo

Definición 49. *Dos números complejos* (a, b) *y* (c, d) *son* iguales *si y sólo si* $a = c$ *y* $b = d$

Definición 50. *Se definen la* suma *y el* producto *de dos números complejos* $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d)$ *por:*

$$z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + bc)$$

Definición 51. *El número complejo* $(0, 1)$ *se representa por* i *y se denomina* unidad imaginaria*.*

Propiedad 1. *Todo número complejo* (a, b) *puede expresarse de la forma:*

$$z = (a, b) = a + b \cdot i$$

Propiedad 2. $i^2 = -1$*.*

Demostración.

$$i = (0, 1) \;\Rightarrow\; i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 + 0i = -1$$

□

Definición 52. *Dado un número complejo* $z = (a, b) = a + b \cdot i$*, se define y representa el* conjugado *de* z *como el número:*

$$\bar{z} = (a, -b) = a - b \cdot i$$

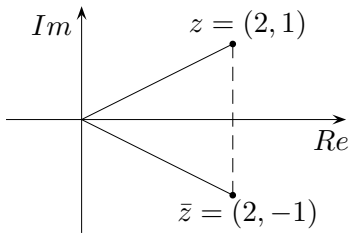

Figura 3.4: Conjugado de un número

Nótese que si z es un complejo, se tiene que $z \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, $\bar{z} = z$.

Teniendo en cuenta que para representar un número complejo es necesario un par ordenado de números reales, es posible representar un número complejo en un plano. En la figura 3.4 se muestra un punto $z = (2, 1)$ y su conjugado $\bar{z} = (2, -1)$. Como se puede ver en la figura, la conjugación consiste en una reflexión (o simetría) respecto al eje de abscisas.

Definición 53. *Dado un número complejo $z = (a, b) = a + b \cdot i$, se define su* módulo*, y se representa por $|z|$, como la longitud del vector que representa en el plano de Gauss, esto es:*

$$|z| = |(a, b)| = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

el módulo de un complejo z suele denotarse por ρ.

Definición 54. *Se define el* argumento *de un número complejo $z = (a, b)$ como el ángulo que forma el vector que representa con el eje de abscisas, en el plano de Gauss, es decir:*

$$\arg(z) = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$$

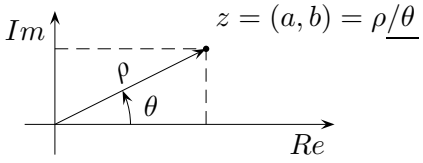

Figura 3.5: Representación módulo-argumento de un número complejo

el argumento de un número complejo suele denotarse por θ. En la figura 3.5 se muestran el módulo y el argumento de z.

[8] También conocido como *plano de Gauss*.

De esta forma, un número complejo puede escribirse en cualquiera de las tres formas que se han visto: $z = (a, b) = a + bi = \rho\underline{/\theta}$. Se deducen inmediatamente las siguientes relaciones:

$$a = \rho \cos\theta \qquad \rho = +\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$b = \rho \operatorname{sen}\theta \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

Si $z = \rho\underline{/\theta} = \rho\,(cos\theta + sen\theta \cdot i)$ es un complejo cualquiera, su conjugado $\bar{z}$ viene dado por $\bar{z} = \rho\underline{/-\theta}$.[9] La expresión de un complejo en forma polar $(\rho\underline{/\theta})$ permite multiplicar fácilmente dos complejos $z = \rho\underline{/\theta}$ y $z' = \rho'\underline{/\theta'}$ ya que:

$$z.z' = \rho.\rho'\underline{/\theta + \theta'}$$

En consecuencia, si $z = \rho\underline{/\theta}$ es no nulo, es decir $\rho \neq 0$, entonces el inverso de z para el producto es

$$z^{-1} = \rho^{-1}\underline{/-\theta}$$

ya que

$$z.z^{-1} = (\rho.\rho^{-1})\underline{/\theta - \theta} = 1\underline{/0} = 1$$

Dados dos complejos $z_1 = a + b \cdot i$ y $z_2 = c + d \cdot i$ (este no nulo), la divsión $\frac{z_1}{z_2}$ es el producto $z_1 \cdot z_2^{-1}$ que puede calcularse en forma binómica:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(a + b \cdot i)(c - d \cdot i)}{(c + d \cdot i)(c - d \cdot i)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad) \cdot i}{c^2 + d^2}$$

o, en forma polar, si $z_1 = \rho_1\underline{/\theta_1}$ y $z_2 = \rho_2\underline{/\theta_2}$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = (\frac{\rho_1}{\rho_2})\underline{/\theta_1 - \theta_2}\,.$$

[9] Hay que tener en cuenta que $cos(-\theta) = cos(\theta)$ y que $sen(-\theta) = -sen(\theta)$.