Tema 1

Introducción a la teoría de conjuntos

1.1. Elementos y conjuntos

Se partirá, en esta introducción, de la existencia intuitiva de unos entes matemáticos que se denominarán *conjuntos*.

Definición 1. *Un conjunto es una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí que se llaman* ***elementos****.*

Los conjuntos se designan, habitualmente, por letras latinas mayúsculas: $A, B, \ldots$ y los elementos por letras latinas minúsculas: $a, b, \ldots$; si a es un elemento del conjunto A, se dirá que *a pertenece* al conjunto A, y se escribirá $a \in A$. En caso contrario, se dirá que el elemento *no pertenece* al conjunto y se denotará $a \notin A$.

Al conjunto que carece de elementos se le denomina *conjunto vacío*, y se denota por $\emptyset$.

Definición 2. *Se dice que un conjunto A está* ***bien definido*** *cuando, dado un elemento cualquiera x, es cierta una, y sólo una, de las proposiciones siguientes:*

1. $x \in A$
2. $x \notin A$

Ejemplo 10. *La proposición "Todos los alumnos que aprobarán Matemáticas en junio" no define adecuadamente un conjunto puesto que, dado un un alumno, no se puede afirmar de antemano si aprobará o no en junio.*

Un conjunto puede ser definido por *extensión*, enumerando todos y cada uno de sus elementos, o por *comprensión*, diciendo cuál es la propiedad que los caracteriza.[1]

Ejemplo 11. *Se muestran a continuación algunos ejemplos de conjuntos definidos por* comprensión*: El conjunto de todos los números naturales pares, el conjunto de todos los europeos, el conjunto de los vehículos automóviles.*

Ejemplo 12. *Algunos conjuntos definidos por* extensión*:*

- *una lista de la compra:* $B = \{pan, leche, aceite\}$
- *algunos números naturales:* $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- *electrodomésticos de línea blanca:* $C = \{lavadora, secadora, horno, lavavajillas, cocina, \ldots\}$*.*

Como se aprecia en este ejemplo, es habitual utilizar las llaves "{" y "}" para delimitar los elementos que componen un conjunto.

1.1.1. Inclusión

Definición 3. *Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es un **subconjunto** de B, y se expresa $A \subseteq B$, cuando todos los elementos de A son también elementos de B, es decir:*

$$Si\{\forall\ x\ , x \in A \ \Rightarrow\ x \in B\}.$$

Se dirá, entonces, que A está **incluído** o **contenido** en B. Cuando A no está contenido en B, se escribirá $A \nsubseteq B$ (lo cual quiere decir que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$).

En la figura 1.1 en la página siguiente se muestra, mediante *Diagramas de Venn*,[2] un conjunto A subconjunto de otro B.

Definición 4. *El conjunto formado por todos los subconjuntos de uno dado A se denomina **partes de** A, y se denota $\wp(A)$.*

[1]Ha de tenerse precaución cuando se enuncia la propiedad que caracteriza a los elementos de un conjunto. En determinadas circunstancias, es posible llegar a situaciones paradójicas en las que una propiedad incorrectamente enunciada no es capaz de generar el conjunto que se pretende.

Un ejemplo típico de este tipo de problemas es la *paradoja del barbero*, analizada en detalle por *Bertrand Russell* (1872–1970, ver Apéndice **??** en la página **??**): Se divide a los hombres de una población entre los que se afeitan a si mismos y los que son afeitados por el barbero. ¿En cuál de los dos conjuntos resultantes se ha de colocar el barbero? (se simplificará aquí el ejemplo suponiendo que un hombre se afeita a sí mismo, o es afeitado por el barbero, no pudiendo suceder ambas posibilidades en el mismo individuo, y que en la población hay un solo barbero).

[2]Los Diagramas de Venn fueron introducidos en 1880 por John Venn (1834–1923, ver Apéndice **??** en la página **??**). Básicamente, se trata de una colección de curvas simples y cerradas, dibujadas en el plano. Son muy útiles para visualizar relaciones entre conjuntos.

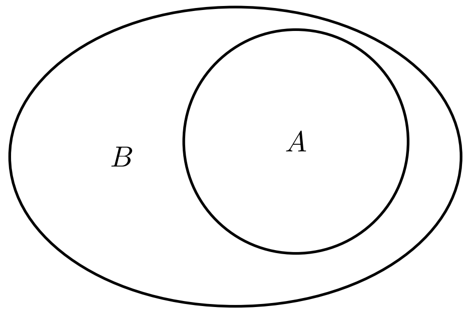


Figura 1.1: Inclusión de Conjuntos, $A \subseteq B$.

Ejemplo 13. *Se exponen a continuación dos conjuntos sencillos, y sus partes:*
Si $A = \{a, b\} \;\Rightarrow\; \wp(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\big\}$.
Si $A = \{a, b, c\} \;\Rightarrow\; \wp(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \big\{b, c\big\}, A\big\}$.

Definición 5. *Un conjunto A es **finito** si tiene un número finito de elementos que se llama **cardinal** y se denota $|A|$ o $\#A$. En caso contrario, se dice que A es no finito.*

Es fácil comprobar que si A es un conjunto finito, tambien lo es $\wp(A)$ y, además, $|\wp(A)| = 2^{|A|}$.

Definición 6. *Dos conjuntos A y B son **iguales** si, simultáneamente, se verifica $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, es decir:*

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A$$

Propiedades 1. *Dados tres conjuntos A, B y C, la inclusión verifica las siguientes propiedades:*

1. $A \subseteq A$ *(Propiedad Reflexiva).*
2. $A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A \;\Rightarrow\; A = B$ *(Propiedad Antisimétrica).*
3. $A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq C$ *(Propiedad Transitiva).*

   Demostración.

   $$\left.\begin{array}{ll} A \subseteq B & \text{luego} \quad \forall\, x \in A \;\Rightarrow\; x \in B \\ B \subseteq C & \text{luego} \quad \forall\, x \in B \;\Rightarrow\; x \in C \end{array}\right\}$$

   por tanto, será:

   $$\forall x \in A \;\Rightarrow\; x \in B \;\Rightarrow\; x \in C$$

   por lo que, finalmente, será $A \subseteq C$. □

4. $\emptyset \subseteq A$.

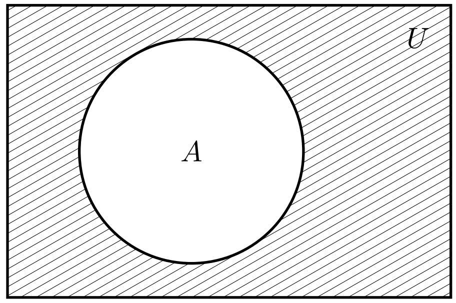


Figura 1.2: Complementario de A respecto a U.

1.2. Operaciones entre conjuntos

1.2.1. Complementación

Definición 7. *Dado un conjunto U, se llama* ***complementario*** *del conjunto $A \subseteq U$, y se denota $\bar{A}$, al conjunto de todos los elementos de U que no pertenecen a A, es decir:*

$$\bar{A} = \{x \in U \ / \ x \notin A\}$$

Obsérvese que la propiedad que determina al complementario de A es la negación de la propiedad que determina los elementos de A.

En la figura 1.2 se muestra, en la zona rayada, el conjunto complementario de A respecto a U.

Propiedades 2. *Dado un conjunto U y dos subconjuntos suyos A y B, se verifican las siguientes propiedades*[3]*:*

1. $\bar{\emptyset} = U$.
2. $\bar{U} = \emptyset$.
3. $\bar{\bar{A}} = A$.
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$.

1.2.2. Unión

Definición 8. *Dados dos conjuntos A y B se llama* ***unión*** *de A y B, y se representa $A \cup B$, al conjunto formado por elementos de A o de B:*

$$A \cup B = \{x \ / \ x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

[3]Cuando, en un contexto determinado, se consideran siempre conjuntos que son subconjuntos de uno dado U, a dicho conjunto de referencia U se le denomina *conjunto universal*.

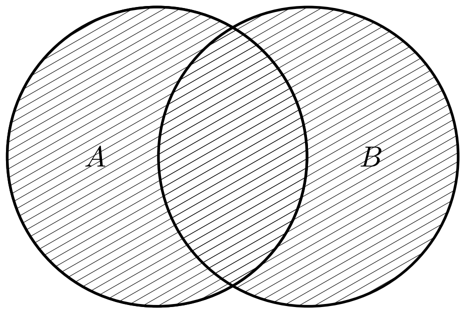


Figura 1.3: Unión de conjuntos: $A \cup B$.

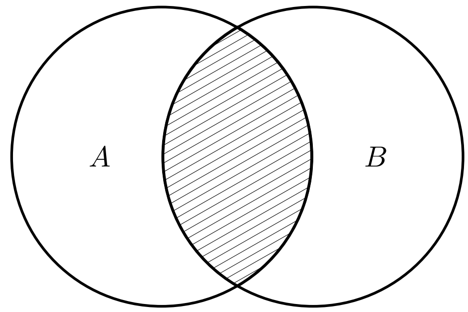


Figura 1.4: Intersección de conjuntos: $A \cap B$.

De esta definición se deduce que un elemento pertenece a la unión si pertenece al menos a uno de los dos conjuntos. En la figura 1.3 se muestran dos conjuntos A y B, y el conjunto $A \cup B$ –éste último comprende la zona rayada de la figura–.

Propiedades 3. *Dados los conjuntos A, B y C, subconjuntos de U, la unión de conjuntos verifica las siguientes propiedades:*

1. $A \subseteq (A \cup B)\,, \quad B \subseteq (A \cup B)$.
2. $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$.
3. $A \subseteq C \;\wedge\; B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; (A \cup B) \subseteq C$.
4. $A \cup A = A$ *(Propiedad Idempotente).*
5. $A \cup B = B \cup A$ *(Propiedad Conmutativa).*
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(Propiedad Asociativa).*
7. $A \cup U = U$ *(U es el conjunto universal).*
8. $A \cup \emptyset = A$.

1.2.3. Intersección

Definición 9. *Dados dos conjuntos A y B se llama* ***intersección*** *de A y B, y se representa $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B, es decir:*

$$A \cap B = \big\{ x \;/\; x \in A \;\wedge\; x \in B \big\}$$

De la definición se sigue que un elemento pertenece a la intersección si pertenece a los dos conjuntos. En la figura 1.4 se muestra un ejemplo de intersección entre los conjuntos A y B. Nuevamente, la zona rayada de la figura indica el conjunto intersección $A \cap B$.

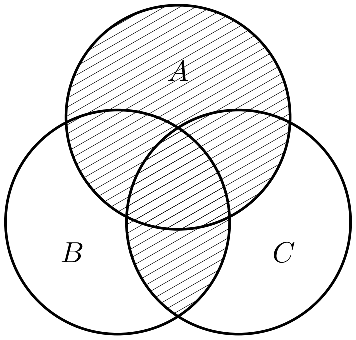


Figura 1.5: $A \cup (B \cap C)$.

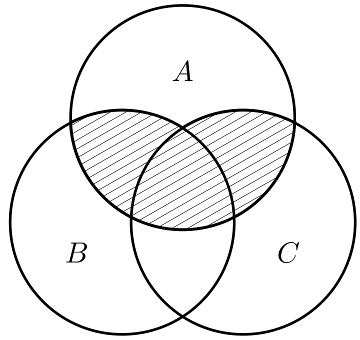


Figura 1.6: $A \cap (B \cup C)$.

Propiedades 4. *Dados tres conjuntos A B y C, subconjuntos de U, la intersección verifica las siguientes propiedades:*

1. $(A \cap B) \subseteq A, \quad (A \cap B) \subseteq B$.
2. $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$.
3. *Si* $A \subseteq C \;\wedge\; B \subseteq C \;\Rightarrow\; (A \cap B) \subseteq C$.[4]
4. $A \cap A = A$ *(Propiedad Idempotente).*
5. $A \cap B = B \cap A$ *(Propiedad Conmutativa).*
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(Propiedad Asociativa).*
7. $A \cap U = A$ *(U es el conjunto universal).*
8. $A \cap \emptyset = \emptyset$.

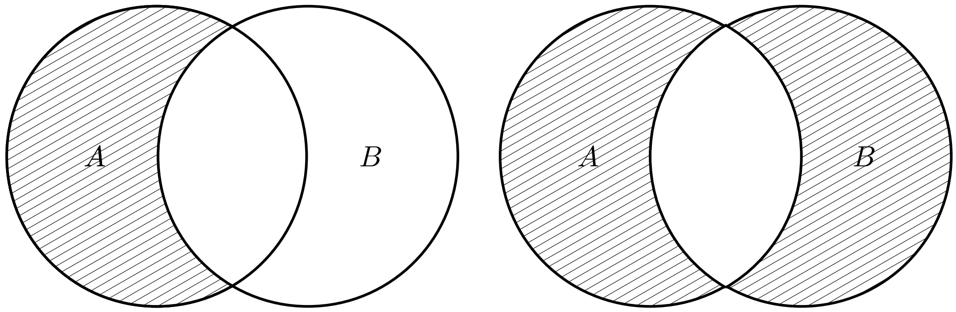
Propiedades 5. *Además, la unión y la intersección verifican las siguientes propiedades conjuntas:*

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Ver figura 1.5).*
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Ver figura 1.6).*
3. $A \cup \bar{A} = U$.
4. $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
5. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ *(Primera Ley de De Morgan).*
6. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ *(Segunda Ley de De Morgan).*

Definición 10. *Si dos conjuntos no tienen ningún elemento en común, se dice que son* ***disjuntos****, es decir:*

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \emptyset$$

[4]Nótese que puede suceder que $A \cap B \subseteq C$ y, sin embargo $A \nsubseteq C$ y $B \nsubseteq C$. Es el caso de $A = \{a, x\}$, $B = \{b, x\}$ y $C = \{x, y\}$.



(a) Diferencia: $A - B$. (b) Diferencia simétrica: $A \triangle B$.

Figura 1.7: Diferencia de conjuntos

1.2.4. Diferencia

Definición 11. *Dados dos conjuntos A y B se llama **diferencia** entre A y B, y se representa $A - B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B:*

$$A - B = \left\{ x \in A \;/\; x \notin B \right\}$$

En la figura 1.7(a) se muestran dos conjuntos A y B y, representado por el área rayada, el conjunto $A - B$. Se aprecia con facilidad que $A - B$ y $B - A$ son, en general, distintos. Por otro lado, es claro que $A - B = A \cap \bar{B}$

Definición 12. *Dados dos conjuntos A y B se llama **diferencia simétrica** entre A y B, y se representa $A \triangle B$, al conjunto unión de los elementos de A que no pertenecen a B con los elementos de B que no pertenecen a A, es decir:*

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

En la figura 1.7(b) se muestran dos conjuntos A y B, y en el área rayada, el conjunto diferencia simétrica $A \triangle B$. Es fácil ver que $A \triangle B = B \triangle A$ y, además:

$$A \triangle B = \left(A \cap \bar{B}\right) \cup \left(B \cap \bar{A}\right) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

1.2.5. Producto Cartesiano

Definición 13. *Dados dos conjuntos A y B, se llama **producto cartesiano** de A por B, y se denota $A \times B$, al conjunto constituido por **pares ordenados** de elementos, el primero perteneciente al conjunto A y el segundo al B. Esto es:*

$$A \times B = \left\{ (a, b) \;/\; a \in A \;\wedge\; b \in B \right\}$$

Ejemplo 14. *El producto cartesiano $A \times B$ de los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ es el conjunto:*

$$A \times B = \left\{ \, (1, a) \,, (1, b) \,, (2, a) \,, (2, b) \,, (3, a) \,, (3, b) \, \right\}$$

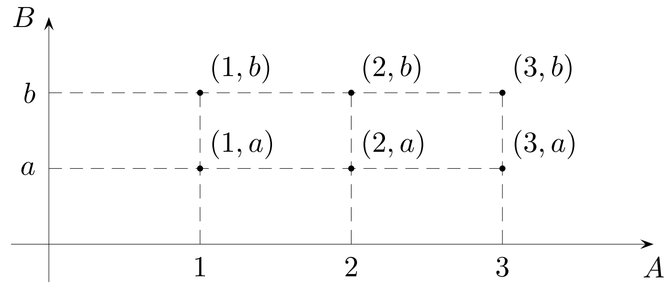


Figura 1.8: Representación gráfica de $A \times B$

Cuando sea posible, es útil representar gráficamente el producto cartesiano por medio de *diagramas de coordenadas cartesianas*. Para ello se toman dos rectas OX y OY, perpendiculares u oblicuas, de forma que el punto O es la intersección de ambas. Este punto recibe el nombre de *origen*, la recta OX es el eje de *abscisas* y la OY es el eje de *ordenadas*. El conjunto A se representa linealmente en OX, y el B en OY. Los elementos (a, b) de $A \times B$ se representan por puntos resultantes de la intersección de la paralela a OY por a con la paralela a OX por b. En la figura 1.8 se muestra la representación en coordenadas cartesianas del ejemplo anterior.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d), elementos del producto cartesiano $A \times B$, son iguales si $a = c$ y $b = d$. Es claro que, en general, $A \times B \neq B \times A$.

Propiedades 6. *Dados los conjuntos A, B, C y D, el producto cartesiano verifica las siguientes propiedades:*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)\,, \quad (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A).$

2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\,, \quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A).$

3. $(A \cup C) \times (B \cup D) = [(A \times B) \cup (C \times D)] \cup [(A \times D) \cup (C \times B)].$

4. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$

Se puede extender la definición de producto cartesiano a n conjuntos:[5]

Definición 14. *Dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se define su producto cartesiano como:*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ / \ a_i \in A_i, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

[5] Un ejemplo típico de producto cartesiano es el plano $\mathbb{R}^2$, que resulta de efectuar el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, en el que se resuelven gran cantidad de problemas de ingeniería, es la extensión del producto cartesiano de tres conjuntos: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

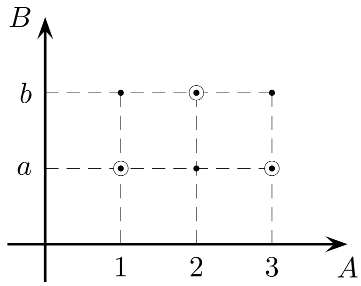


Figura 1.9: Representación gráfica de $\mathcal{R} \subseteq A \times B$

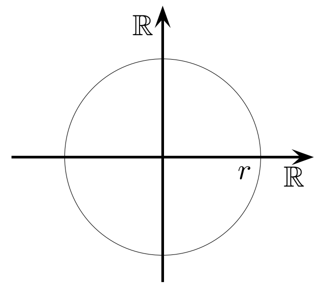


Figura 1.10: Representación gráfica de $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1.3. Relaciones entre conjuntos

Definición 15. *Dados dos conjuntos A y B, una* ***relación*** *$\mathcal{R}$ es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Al conjunto A se le denomina conjunto* ***inicial*** *de la relación, y al B conjunto* ***final****.*

Si el par ordenado (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$, se dirá que a está ***relacionado*** *con b, y se denotará $a\mathcal{R}b$.*

Ejemplo 15. *Para los conjuntos A y B del ejemplo 14 en la página 25, se tiene que $A \times B = \left\{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \right\}$. Una posible relación sería $\mathcal{R} = \left\{ (1, a), (2, b), (3, a) \right\}$.*

En la figura 1.9 se muestran, mediante puntos, los elementos de $A \times B$, y mediante círculos los de $\mathcal{R}$.

Ejemplo 16. *Para el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, serán $A = B = \mathbb{R}$. Una posible relación podría ser $\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;/\; x^2 + y^2 = r^2\right\}$, siendo r un número real positivo.*

En la figura 1.10 se muestran los conjuntos A y B (los ejes cartesianos), y toda la superficie del papel, en la que se encuentran los ejes, que constituye el producto cartesiano $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Los elementos de la relación $\mathcal{C}$ serán los puntos de ese plano que verifiquen la ecuación que la caracteriza. En la figura, esos puntos se encuentran sobre la línea fina que, como se aprecia, forma una circunferencia de radio r.

Ejemplo 17. *El estado de una partida de un juego de barcos se determina, habitualmente, en un tablero cuadrado de 100 casillas, ordenadas en 10 filas y 10 columnas numeradas respectivamente del 1 al 10 y de la A a la J, tal como se muestra en la figura 1.11 en la página siguiente. Si llamamos X al conjunto de las filas del tablero e Y al de las columnas, las casillas del tablero serán pares ordenados de la forma $(x, y) \in X \times Y$. La situación de la flota de barcos en el tablero bien puede considerarse una relación $\mathcal{F} \subseteq X \times Y$. En concreto, los barcos que se muestran en el tablero de la figura 1.12 en la*

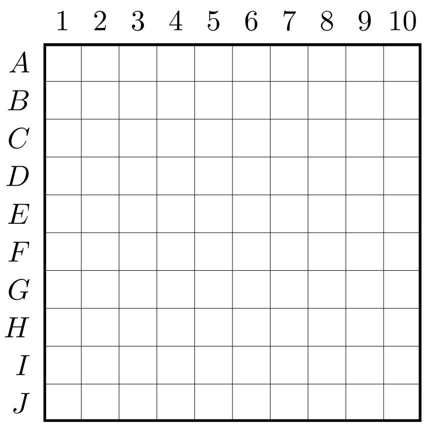


Figura 1.11: Tablero de una partida de barcos: $X \times Y$.

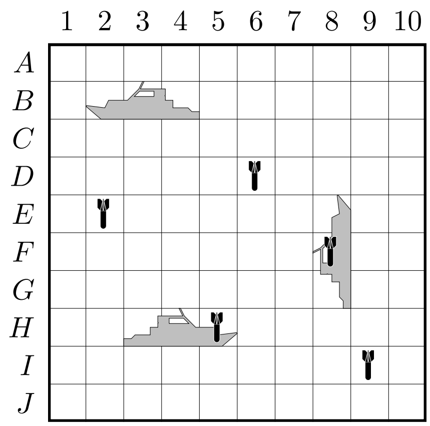


Figura 1.12: Flota de barcos ($\mathcal{F}$) y torpedos disparados ($\mathcal{T}$) en un tablero de barcos ($X \times Y$).

página siguiente constituyen la relación:

$$\mathcal{F} = \{(B, 2), (B, 3), (B, 4), (E, 8), (F, 8), (G, 8), (H, 3), (H, 4), (H, 5)\}$$

Por otra parte, los sucesivos intentos de hundir la flota, indicados en la figura 1.12 mediante torpedos, constituyen otra relación $\mathcal{T}$ de la forma:

$$\mathcal{T} = \{(D, 6), (E, 2), (F, 8), (H, 5), (I, 9)\}$$

Los impactos que los torpedos han producido en los barcos, serán la relación intersección entre ambas: $\mathcal{I} = \mathcal{F} \cap \mathcal{T} = \{(F, 8), (H, 5)\}$.

Definición 16. *Dado un conjunto A, se llama* ***relación binaria*** *de A a cualquier subconjunto de $A \times A$.*

La relación binaria es, por tanto, un caso particular de relación en el que coinciden el conjunto inicial y el final.

1.3.1. Relación de Orden

Definición 17. *Se llama* ***relación de orden*** *en un conjunto A, y se representa por $\preccurlyeq$ a una relación binaria en A cuyos elementos (pares) satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *$a \preccurlyeq a$ (Propiedad Reflexiva).*
2. *Si $a_1 \preccurlyeq a_2 \;\wedge\; a_2 \preccurlyeq a_1 \;\Rightarrow\; a_1 = a_2$ (Propiedad Antisimétrica).*
3. *Si $a_1 \preccurlyeq a_2 \;\wedge\; a_2 \preccurlyeq a_3 \;\Rightarrow\; a_1 \preccurlyeq a_3$ (Propiedad Transitiva).*

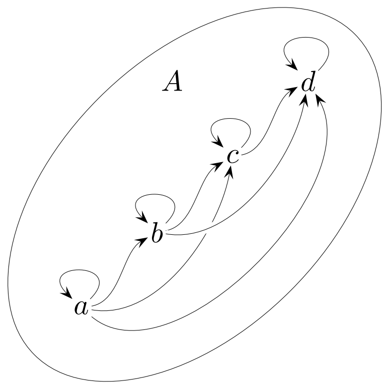


Figura 1.13: Ejemplo de una Relación de Orden.

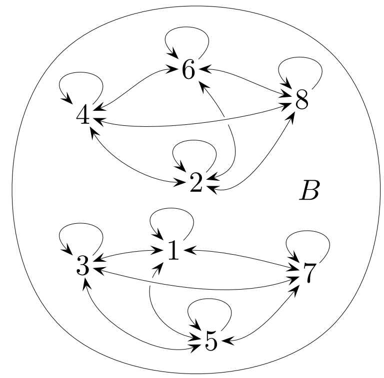


Figura 1.14: Ejemplo de una Relación de Equivalencia.

Si $a \preccurlyeq b$ se dice que a es ***anterior***[6] *a b. En la figura 1.13 se muestra un ejemplo de relación de orden entre los elementos a, b, c y d del conjunto A. Cada una de las flechas de la figura relaciona entre sí dos elementos, de forma ordenada; por ejemplo: la flecha que va del elemento a al elemento b significa que el par (a, b) pertenece a la relación de orden, o lo que es lo mismo, que $a \preccurlyeq b$.*

Ejemplos 1. *1. Dado cualquier conjunto A, la relación "estar contenido en "definida en $\wp(A)$ es una relación de orden.*

2. *Si $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, la relación "$\leq$"es tambien de orden.*

3. *Dados dos números enteros a y b, se dice que a divide a b y se denota $a|b$ si existe un número entero m tal que $b = am$. Es fácil comprobar que es reflexiva y transtiva. Cuando la restringimos a un subconjunto A de números enteros del mismo signo (es decir $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ o $A \subseteq \mathbb{Z}^-$), se convierte en una relación de orden.*

1.3.2. Relación de Equivalencia

Definición 18. *Se llama* ***relación de equivalencia*** *en un conjunto A, y se representa por $\mathcal{R}$, a una relación binaria en A cuyos elementos (pares) satisfacen siguientes propiedades:*

1. *$a\mathcal{R}a$ (Propiedad Reflexiva).*

2. *Si $a_1\mathcal{R}a_2 \;\Rightarrow\; a_2\mathcal{R}a_1$ (Propiedad Simétrica).*

---

[6] De la relación de orden nace, por ejemplo, el ordenamiento de los números reales. No es de extrañar el parecido entre el símbolo "$\preccurlyeq$" y el símbolo "$\leq$" (o, a veces, "$\leqslant$") utilizado para ordenar de menor a mayor los números reales.

3. *Si* $a_1 \mathcal{R} a_2 \ \wedge \ a_2 \mathcal{R} a_3 \ \Rightarrow \ a_1 \mathcal{R} a_3$ *(Propiedad Transitiva).*

Ejemplo 18. *En* $\mathbb{Z}$*, la relación:*

$$a \equiv_2 b \Longleftrightarrow a - b \text{ es un múltiplo de } 2$$

es una relación de equivalencia. Esta definición se puede extender, considerando cualquier entero positivo m *y definiendo:*

$$a \equiv_m b \Longleftrightarrow a - b \text{ es un múltiplo de } m$$

En la figura 1.14 en la página anterior se muestra una gráfica de la relación anterior entre los elementos $1, 2, \ldots, 8$ *del conjunto* B*. Las flechas de la figura, al igual que en el ejemplo anterior, indican la existencia de relaciones entre los elementos a los que unen. Obsérvese que, ahora, todas las flechas son dobles.*

Las relaciones de equivalencia permiten agrupar elementos relacionados entre sí en subconjuntos, tal y como se aprecia en la figura. Estos subconjuntos se llaman *clases de equivalencia*:

Definición 19. *Dado un conjunto* A *dotado de una relación de equivalencia* $\mathcal{R}$*, se llama* ***clase de equivalencia*** *del elemento* $a \in A$*, y se denota por* $\mathcal{C}(a)$ *al conjunto de los elementos de* A *que están relacionados con* a *mediante* $\mathcal{R}$*. Es decir:*

$$\mathcal{C}(a) = \{x \in A \ / \ x \mathcal{R} a\}$$

La relación de equivalencia del ejemplo que hemos visto antes divide a los elementos del conjunto $\mathbb{Z}$ en dos clases de equivalencia, una formada por los números pares, y la otra por los impares. Cuando la relación es $\equiv_m$, tenemos m clases de equivalencia [7] $[0], [1], \ldots, [m-1]$.

Propiedades 7. *Las clases de equivalencia verifican las siguientes propiedades:*

1. *Dos elementos* a_1 *y* a_2 *relacionados entre sí engendran la misma clase de equivalencia*[8]*.*

   Demostración.

$$\left.\begin{array}{l} \forall a_1 \in \mathcal{C}(a), \ a_1 \mathcal{R} a \\ \forall a_2 \in \mathcal{C}(a), \ a_2 \mathcal{R} a \ \Rightarrow \ a \mathcal{R} a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ a_1 \mathcal{R} a_2$$

   por tanto, será $a_1 \in \mathcal{C}(a_2)$ y $a_2 \in \mathcal{C}(a_1)$, con lo que, al fin:

$$\mathcal{C}(a_1) = \mathcal{C}(a_2) = \mathcal{C}(a)$$

□

[7] Un número entero x pertenece a la clase de equivalencia $[r]$, con $0 \leq r \leq m-1$, si r es el resto de la división de x entre m.

[8] Teniendo esto en cuenta, una clase de equivalencia puede representarse por cualquiera de sus elementos.

2. *Dos clases de equivalencia distintas son disjuntas, es decir, no pueden tener elementos comunes.*

Definición 20. *A una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos no vacíos de A que verifica:*

- $A = \bigcup_{i\in I} A_i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para todo* $i \neq j$

se le llama ***partición*** *de A.*

Definición 21. *Dada una relación de equivalencia $\mathcal{R}$, definida en un conjunto A, se llama* ***conjunto cociente*** *de A respecto a $\mathcal{R}$, y se denota $A/\mathcal{R}$, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia engendradas en A por $\mathcal{R}$. En el ejemplo que estamos manejando el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv_m$ tiene m elementos. Este conjunto se denota $\mathbb{Z}_m$ y se llama conjunto de restos módulo m.*

Es fácil comprobar que una partición define una relación de equivalencia y viceversa.

1.4. Aplicaciones y funciones

Definición 22. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se llama* ***correspondencia unívoca*** *f de A en B, y se representa*[9] *por $f : A \to B$, a un subconjunto f del producto cartesiano $A \times B$ tal que cada elemento de A posee, a lo sumo, un correspondiente en B. Esto es:*

$$\forall a \in A, \quad si\ b_1, b_2 \in B \,/\, (a, b_1) \in f \ \wedge (a, b_2) \in f \implies b_1 = b_2$$

Definición 23. *Si $(a, b) \in f$ se dice que b es la* ***imagen*** *de a, y que el elemento a es el original de b por la correspondencia f. El conjunto A se llama* ***conjunto inicial****, y el B* ***conjunto final****. La relación entre a y b debida a f se suele representar de la forma:*

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longrightarrow f(a) = b \end{aligned}$$

Además, se llama dominio *de f y se denota como $Dom(f)$, al subconjunto de A formado por los elementos que poseen imagen en B, es decir:*

$$Dom(f) = \{a \in A \ / \ \exists b \in B \ tal\ que\ (a, b) \in f\}$$

[9] La correspondencia f también se puede representar como

$$A \xrightarrow{f} B \qquad \text{ó} \qquad f \subseteq A \times B$$

Definición 24. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se dice que una correspondencia unívoca $f : A \to B$ es una **aplicación** si cada elemento de A posee un único correspondiente en B. Esto es:*

$$\forall a \in A,\ \exists^{\bullet} b \in B,\ (a, b) \in f$$

De lo dicho anteriormente, se desprende que una correspondencia unívoca f es aplicación si, y sólo si, $Dom(f) = A$.

Ejemplo 19. *Se puede considerar que el arco iris define una aplicación que asocia a cada rango de frecuencias del espectro electromagnético, un color de los que percibimos, tal como se muestra en la figura 1.15.*

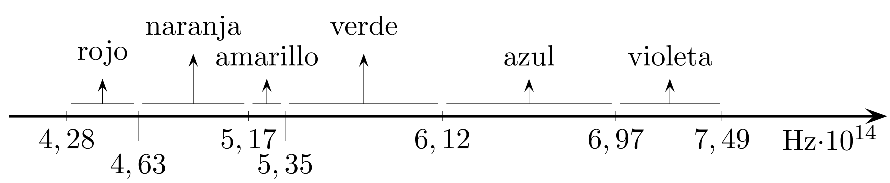


Figura 1.15: Aplicación del espectro visible

Ejemplo 20. *El horario de un ferrocarril define una aplicación entre un conjunto de estaciones $a, b, c, \dots$ y un conjunto de números que sirven para expresar la medida del tiempo (8h, 8h30m, 8h57m,...) que invertirá el tren en llegar a cada estación.*

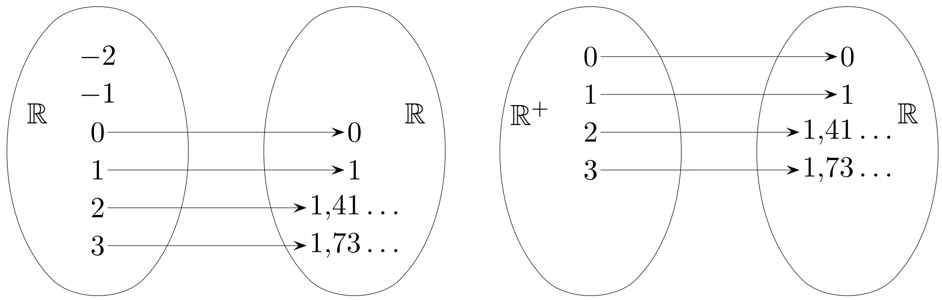
El tren no puede estar en dos estaciones al mismo tiempo, por lo que en el horario no puede corresponder la misma medida de tiempo a dos estaciones distintas. Esto hace que esta correspondencia entre estaciones y horarios sea efectivamente una aplicación.

Se suele denominar *función* a la correspondencia $f : A \to B$ si A y B son, ambos, conjuntos numéricos. Con frecuencia, se utiliza la letra x para denotar los elementos del conjunto inicial de f, y la letra y para los elementos del conjunto final. En este caso, si $(x, y) \in f$ se representará $y = f(x)$.

Ejemplo 21. *Una tabla de seguros de vida es una función que asocia a la edad de cada solicitante (1 año, 2 años, 3 años, etc.) el importe de las primas que ha de pagar para suscribir tal seguro.*

Ejemplo 22. *La regla que permite calcular el perímetro p de una circunferencia multiplicando su diámetro $2r$ (siendo r el radio) por la constante $\pi \simeq 3,1416$, es una función real de variable real, ya que el conjunto inicial es el de los números reales, $\mathbb{R}$, y coincide con el de llegada. Se representa:*

$$p = f(r) = 3,1416 \cdot 2r$$



(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Figura 1.16: Función $y = f(x) = +\sqrt{x}$ definida en diferentes conjuntos

Es conveniente precisar que para determinar totalmente una correspondencia no es suficiente con especificar la regla que liga a los elementos de los conjuntos inicial y final; es necesario, también, especificar cuáles son estos conjuntos. En la figura 1.16 se muestra un ejemplo de esto. En la figura 1.16(a) se muestra una imagen de la correspondencia $y = +\sqrt{x}$ entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$, siendo el dominio de esta correspondencia $\mathbb{R}^+$. En la 1.16(b) se consideran como conjunto inicial $\mathbb{R}^+$ y como conjunto final $\mathbb{R}$, resultando, en este segundo caso que f es una aplicación.

Definición 25. *Se dice que una aplicación $f : A \to B$ entre A y B es:*

1. ***inyectiva*** *si el original de un elemento de B está formado, a lo sumo, por un elemento de A, esto es:*

$$\textit{Si } f(a_1) = f(a_2) = b \;\Rightarrow\; a_1 = a_2, \quad \forall\, a_1, a_2 \in A,\ \forall\, b \in B$$

2. ***sobreyectiva***, ***suprayectiva*** *o* ***exhaustiva*** *si todo elemento de B es imagen, al menos, de un elemento de A, es decir:*

$$\forall b \in B,\ \exists\, a \in A \;\big/\; f(a) = b$$

3. ***biyectiva*** *o* ***biunívoca*** *si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.*

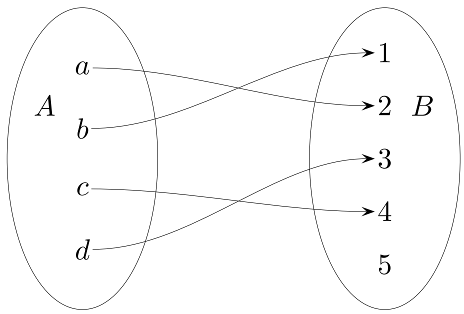


Figura 1.17: Aplicación inyectiva y no sobreyectiva

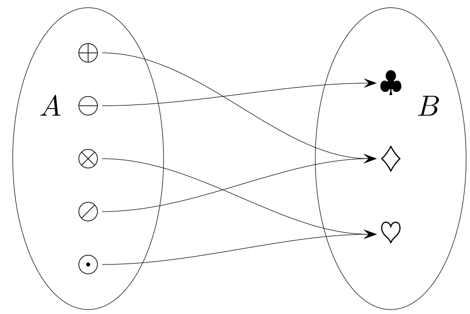


Figura 1.18: Aplicación sobreyectiva y no inyectiva

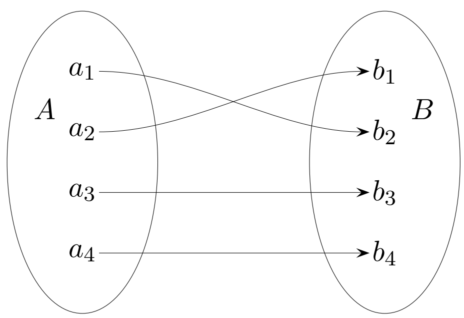


Figura 1.19: Aplicación biyectiva

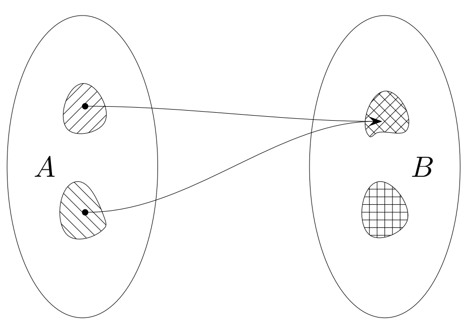


Figura 1.20: Aplicación no inyectiva y no sobreyectiva

En las figuras de la página anterior se muestran ejemplos de aplicaciones, mediante diagramas de Venn. En la figura 1.17 se muestra una aplicación inyectiva.

En las figura 1.18 se muestra un ejemplo de aplicación sobreyectiva.

En las figura 1.19 se muestra un ejemplo de aplicación biyectiva. Se comprende fácilmente, a la vista de esta, que este tipo de aplicaciones transforman todos los elementos del conjunto inicial en todos los del conjunto final. Al mismo tiempo, cada elemento del conjunto final es imagen de un único elemento del inicial.

Por último, en la figura 1.20 se tiene un ejemplo de aplicación que no se corresponde con ninguno de los tres tipos de los ejemplos anteriores.

Es interesante destacar que si los conjuntos A y B son finitos y $f : A \to B$ es una aplicación entre ellos, se verifica que:

- Si f es inyectiva[10], entonces $|A| \leq |B|$
- Si f es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$
- Si f es biyectiva[11], entonces $|A| = |B|$

Definición 26. *Dados tres conjuntos A, B y C, y dos funciones f y g tales que*

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longrightarrow f(a) = b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : B &\longrightarrow C \\ b &\longrightarrow g(b) = c \end{aligned}$$

se llama ***composición de** f **con** g a la función*

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\longrightarrow C \\ a &\longrightarrow (g \circ f)(a) = g[f(a)] = g(b) = c \end{aligned}$$

Definición 27. *Se llama aplicación* ***identidad*** *a una aplicación I_A entre A y A de la forma:*

$$\begin{aligned} I_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longrightarrow I_A(a) = a \end{aligned}$$

Definición 28. *Sea $f : A \to B$ una aplicación. Se dice que $g : B \to A$ es una* ***aplicación inversa*** *de f si se verifica que $f \circ g = I_B$ y $g \circ f = I_A$.*

Proposición 1. *Dada una aplicación $f : A \to B$, si f admite inversa, ésta es única y se denota f^{-1}.*

Además f admite inversa si, y sólo si, f es biyectiva.

---

[10]Este principio se conoce como Principio de Palomar. Es claro que si tenemos un conjunto de n palomas y otro conjunto de m nidos, con $n > m$, y definimos una aplicación entre ellos que consiste en enviar cada paloma a su nido, al menos dos palomas comparten un nido, es decir la aplicación no es inyectiva.

[11]Conviene destacar que, si bien no todos los conjuntos con el mismo cardinal son biyectivos, si es posible definir siempre una aplicación biyectiva entre dos conjuntos con el mismo número de elementos.