# Tema 5

# Integración Indefinida

## 5.1. Primitiva de una función. Reglas básicas

En este tema estudiaremos lo que podríamos llamar el problema inverso de la derivación, es decir, dada una función $f$ hallar otra $F$ tal que $F' = f$.

**Definición 5.1.1** Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **primitiva** de $f$ en $[a, b]$ si $F$ es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

**Ejemplo 5.1.1** Sean $f(x) = 3x^2$, $F(x) = x^3$. Claramente $F'(x) = f(x)$ para todo $x$, por lo que $F$ es una primitiva de $f$.

Es evidente que si dos funciones se diferencian en una constante (por ejemplo, $F_1(x) = \operatorname{sen} x$ y $F_2(x) = \operatorname{sen} x + 5$), su derivada será la misma (en este caso, $f(x) = \cos x$), por lo que tanto $F_1$ como $F_2$ son primitivas de $f$. También es cierto el recíproco, es decir, las primitivas de una función se diferencian en una constante:

**Teorema 5.1.1** *Sea $F_1$ una primitiva de $f$ en $[a, b]$. $F_2$ es otra primitiva de $f$ en $[a, b]$ si y sólo si $F_1 - F_2$ es constante en $[a, b]$.*

Este resultado nos permite establecer la siguiente definición:

**Definición 5.1.2** Al conjunto de todas las primitivas de $f$ en $[a, b]$ se le denomina **integral indefinida** de $f$ en $[a, b]$ y se representa por $\int f(x)dx$.

Dicho de otra forma

$$\int f(x)dx = \{F/F \text{ es una primitiva de } f \text{ en } [a,b]\}$$

y si tenemos en cuenta que dos primitivas cualesquiera de $f$ se diferencian en una constante, el conjunto anterior se suele escribir

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde $F$ es una primitiva cualquiera de $f$ y $C$ una constante arbitraria.

Teniendo en cuenta las definiciones de *primitiva* e *integral indefinida* se deduce fácilmente el siguiente resultado, que pone de manifiesto la linealidad de la integral indefinida:

**Teorema 5.1.2** *Sean $f$ y $g$ dos funciones con primitiva en el intervalo $[a,b]$ y sean $\alpha, \beta$ dos números reales cualesquiera. Se verifica que*

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

El teorema anterior debe interpretarse como sigue: para obtener todas las primitivas de $\alpha f + \beta g$ debo calcular una primitiva de $f$ y multiplicarla por $\alpha$, también debo calcular una primitiva de $g$ y multiplicarla por $\beta$, sumar las funciones así obtenidas y añadirle una constante arbitraria. Veámoslo en un ejemplo:

**Ejemplo 5.1.2**

$$\begin{aligned} \int [3\cos x + 4x]\, dx &= 3\int \cos dx + 4\int x dx \\ &= 3\operatorname{sen} x + 4\frac{1}{2}x^2 + C = 3\operatorname{sen} x + 2x^2 + C \end{aligned}$$

## 5.2. Integrales inmediatas

Entendemos por *integrales inmediatas* algunas integrales sencillas que pueden verificarse directamente derivando, como por ejemplo:

$$\{F(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow F'(x) = \cos x\} \Longrightarrow \int \cos dx = \operatorname{sen} x + C$$

El concepto de integral inmediata es subjetivo, pero suelen considerarse como tales las que se obtienen a partir de la derivación de las funciones elementales y sus combinaciones más sencillas. Estas integrales será necesario manejarlas con soltura, ya que cualquier método de integración termina conduciendo a una o varias integrales inmediatas.

A continuación presentamos una tabla de integrales inmediatas:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R},\ a > 0), \qquad \int e^x dx = e^x + C,$$
$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C,$$
$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, \qquad \int \cot x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C,$$
$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C, \qquad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C, \qquad \int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C,$$
$$\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C, \qquad \int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + C,$$
$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 x} = -\coth x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C = \arg\operatorname{senh} x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C = \arg\cosh x + C,$$
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \arg\tanh x + C.$$

Cuadro 5.1: Tabla de integrales inmediatas

## 5.3. Integración por partes. Integración por cambio de variable

En esta sección veremos dos de los métodos más utilizados a la hora de calcular primitivas: la *integración por partes* y la *integración por cambio de variable.*

El método de **integración por partes** consiste en aplicar la regla de derivación de un producto a la inversa, y así se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \Longrightarrow$$

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) - u'(x)v(x) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx}$$

Este método será útil cuando la integral $\int u'(x)v(x)dx$ sea más fácil de calcular que la integral $\int u(x)v'(x)dx$.

Teniendo en cuenta la notación $du = u'(x)dx$ y $dv = v'(x)dx$, el método anterior se suele escribir de la siguiente forma más fácil de recordar:

$$\boxed{\int u\ dv = uv - \int v\ du}$$

Veamos un par de ejemplos:

**Ejemplo 5.3.1**

$$\int \ln|x|dx \underset{\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{u=\ln|x| \ \Rightarrow\ du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx \ \Rightarrow\ v=x}}}{\overset{}{=}} x\ln|x| - \int dx = x\ln|x| - x + C$$

**Ejemplo 5.3.2**

$$\int x\,\mathrm{sen}\,x dx \underset{\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{u=x \ \Rightarrow\ du=dx \\ dv=\mathrm{sen}\,x dx \ \Rightarrow\ v=-\cos x}}}{=} -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \mathrm{sen}\,x + C$$

El método de **integración por cambio de variable** se basa en observar como afecta un cambio de variable a la derivada de una función. Así, si a la función $F(x)$ le aplicamos el cambio de variable $x = \phi(t)$, obtenemos $G(t) = F(\phi(t))$ y, aplicando la regla de la cadena:

$$F'(x) = f(x) \Longrightarrow G'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

de lo que deducimos el siguiente teorema:

**Teorema 5.3.1** *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y consideremos el cambio de variable $x = \phi(t)$ con $\phi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ con derivada continua. En ese caso tenemos que*

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

El teorema anterior es fácil de recordar si utilizamos la siguiente regla: si el cambio es $x = \phi(t)$ entonces $dx/dt = \phi'(t)$ y, por tanto, $dx = \phi'(t)dt$, por lo que $f(x)dx = f(\phi(t))\phi'(t)dt$. Veamos un par de ejemplos:

**Ejemplo 5.3.3** En la tabla de integrales inmediatas (tabla 5.1) habíamos visto que

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Veamos como podemos utilizar el cambio de variable para calcular

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$$

donde $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0, b > 0$. En efecto, tenemos que

$$I = \int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \int \frac{(1/a^2)dx}{1+(b^2/a^2)x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}$$

y haciendo el cambio de variable

$$\frac{bx}{a} = t \Rightarrow x = \frac{at}{b} \Rightarrow dx = \frac{a}{b}dt$$

obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^2}\int \frac{(a/b)dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{ab}\arctan t + C = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + C \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.3.4** Calculemos ahora

$$I = \int \operatorname{sen}^7 x \ \cos x \ dx$$

Observemos que si consideramos el cambio $\operatorname{sen} x = t$, no nos hace falta despejar $x$ en función de $t$ para derivar, ya que

$$\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \cos x = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \cos x \ dx = dt$$

y por tanto

$$I = \int \operatorname{sen}^7 x \ \cos x \ dx = \int t^7 \ dt = \frac{1}{8} t^8 + C = \frac{\operatorname{sen}^8 x}{8} + C$$

## 5.4. Integración de funciones racionales. Descomposición en suma de fracciones simples

**Definición 5.4.1** La función $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de $x$, se llama **función racional** y la correspondiente integral

$$\int f(x) \ dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \ dx$$

se denomina **integral racional** o **integral de una función racional**.

El método para resolver este tipo de integrales se basa en escribir la función racional $P(x)/Q(x)$ como suma de lo que llamaremos *fracciones simples*, pero para ello previamente habremos de conseguir que $P(x)$ y $Q(x)$ no tengan factores en común y que $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$. Con ese objetivo realizamos los siguientes pasos:

1. Escribimos $P(x)/Q(x)$ en su forma irreducible, es decir, factorizamos $P(x)$ y $Q(x)$ y eliminamos sus factores en común.

**Ejemplo 5.4.1**

$$\begin{aligned}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+x-2} &= \frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)}\\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{x+2} = \frac{x^2-3x+2}{x+2}\end{aligned}$$

2. Si grado$(P(x)) \geq$ grado$(Q(x))$ se procede a efectuar la división, obteniéndose un polinomio más una función racional en la que el numerador (el resto de la división) es de menor grado que el denominador, es decir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde $C(x)$ es el cociente de la división, $R(x)$ el resto y, por tanto, grado$(R(x)) <$ grado$(Q(x))$.

**Ejemplo 5.4.2**

$$\frac{x^2-3x+2}{x+2} = x-5+\frac{12}{x+2}$$

Tras realizar estos dos pasos la integral de la función racional es

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

y, puesto que la integral de un polinomio es inmediata, podemos centrarnos en el caso de que la función racional sea ya una fracción irreducible y el numerador de menor grado que el denominador.

**Definición 5.4.2** Se denominan **fracciones simples** a las funciones racionales de la forma

$$\frac{A}{x-r}, \quad \frac{A}{(x-r)^n}, \quad \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

**Teorema 5.4.1** *Dada una función racional irreducible con coeficientes reales $P(x)/Q(x)$ tal que grado$(P(x)) <$ grado$(Q(x))$, si las raíces reales del denominador son $r_1, \ldots, r_k$ y las raíces complejas (que aparecen por pares de* *raíces conjugadas) son $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l$, con multiplicidades respectivas $m_1, \ldots, m_k$ y $n_1, \ldots, n_l$, es decir, existe $c \in I\!R$ $(c \neq 0)$ tal que*

$$Q(x) = c\ (x-r_1)^{m_1} \cdots (x-r_k)^{m_k}[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{n_1} \cdots [(x-\alpha_l)^2+\beta_l^2]^{n_l}$$

*entonces la función racional $P(x)/Q(x)$ puede escribirse de modo único como suma de fracciones simples:*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{(x-r_1)^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} + \cdots \\ & \cdots + \frac{B_1}{x-r_k} + \frac{B_2}{(x-r_k)^2} + \cdots + \frac{B_{m_k}}{(x-r_k)^{m_k}} \\ & + \frac{C_1x+D_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \frac{C_2x+D_2}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^2} + \cdots + \frac{C_{n_1}x+D_{n_1}}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{n_1}} + \cdots \\ & \cdots + \frac{E_1x+F_1}{(x-\alpha_l)^2+\beta_l^2} + \frac{E_2x+F_2}{[(x-\alpha_l)^2+\beta_l^2]^2} + \cdots + \frac{C_{n_l}x+D_{n_l}}{[(x-\alpha_l)^2+\beta_l^2]^{n_l}}\end{aligned}$$

**Observación 5.4.1** El teorema anterior significa que, a la hora de escribir $P(x)/Q(x)$ como suma de fracciones simples, por cada raíz real $r$ de multiplicidad $k$ de $Q(x) = 0$ se añaden los sumandos de la forma

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$$

y por cada par de raíces complejas conjugadas $\alpha \pm \beta i$ de multiplicidad $k$ de $Q(x) = 0$ se añaden los sumandos

$$\frac{A_1x+B_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{A_2x+B_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}$$

**Observación 5.4.2** Los coeficientes $A_1, \ldots, D_{n_l}$ del teorema 5.4.1 se calculan del siguiente modo: se reduce la igualdad de fracciones a un común denominador y, multiplicando la igualdad por él, obtenemos una igualdad de polinomios. Como dos polinomios son iguales si todos sus coeficientes son iguales, basta igualar los coeficientes para obtener un sistema lineal en el que las incógnitas son las constantes a determinar y todo se reduce, por tanto, a resolver el sistema lineal.

**Ejemplo 5.4.3** Veamos como escribir la función racional

$$\frac{5x^4+2x^2+2x+3}{x^5-x^4-x+1}$$

como suma de fracciones simples. Si factorizamos el denominador de la función racional obtenemos que

$$x^5 - x^4 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)(x^2+1)$$

Como el denominador no tiene ningún factor en común con el numerador (es fácil de comprobar por simple sustitución de las raíces) y el grado del numerador es menor que el grado del denominador, pasamos a aplicar el teorema 5.4.1, que nos dice que

$$\frac{5x^4+2x^2+2x+3}{x^5-x^4-x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \tag{5.1}$$

Multiplicando la igualdad anterior por $x^5 - x^4 - x + 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} 5x^4+2x^2+2x+3 &= A(x-1)(x+1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) \\ &\quad + C(x-1)^2(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)^2(x+1) \\ &= (A+C+D)x^4 + (B-2C-D+E)x^3 + (B+2C-D-E)x^2 \\ &\quad + (B-2C+D-E)x + (-A+B+C+E) \end{aligned}$$

de donde se deduce que los coeficientes $A, B, C, D, E$ son solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A+C+D & = & 5 \\ B-2C-D+E & = & 0 \\ B+2C-D-E & = & 2 \\ B-2C+D-E & = & 2 \\ -A+B+C+E & = & 3 \end{array} \right.$$

y por tanto tenemos que

$$A = 2,\ B = 3,\ C = 1,\ D = 2,\ E = 1$$

Sustituyendo ahora en (5.1) obtenemos

$$\frac{5x^4+2x^2+2x+3}{x^5-x^4-x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

con lo que ya hemos obtenido la función racional expresada como suma de fracciones simples.

Para aplicar lo visto hasta ahora en el cálculo de la integral de una función racional nos falta saber integrar las fracciones simples. Veamos como hacerlo.

La integral de la fracción simple de la forma $A/(x-r)$ es casi inmediata:

$$\underbrace{\int \frac{A}{x-r}\,dx = \int \frac{A}{u}\,du}_{\substack{\uparrow \\ u=x-r \Rightarrow du=dx}} = A\ln|u| + C = A\ln|x-r| + C$$

y del mismo modo la integral de $A/(x-r)^n$ (para $n \neq 1$) es:

$$\underbrace{\int \frac{A}{(x-r)^n}\,dx = \int \frac{A}{u^n}\,du}_{\substack{\uparrow \\ u=x-r \Rightarrow du=dx}} = \int Au^{-n}\,du = A\frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$= \frac{A}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + C$$

La integral de la fracción simple $(Ax+B)/[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ se obtiene del siguiente modo:

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int \left[\frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right]\,dx$$

$$= \int \frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx + \int \frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx \tag{5.2}$$

y puesto que tenemos que (haciendo el cambio $u=(x-\alpha)^2+\beta^2$)

$$\int \frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{A}{2}\ln|(x-\alpha)^2+\beta^2| + C \tag{5.3}$$

y también que (haciendo ahora el cambio $u=(x-\alpha)/\beta$)

$$\int \frac{A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int \frac{\frac{A\alpha+B}{\beta^2}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\,dx = \frac{A\alpha+B}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C \tag{5.4}$$

basta ahora con sustituir (5.3) y (5.4) en (5.2) para obtener

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{A}{2}\ln|(x-\alpha)^2+\beta^2| + \frac{A\alpha+B}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

Tan solo nos queda por calcular la primitiva de la fracción simple de la forma $(Ax+B)/[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n$. Es el caso más laborioso y no se supone conocido por los alumnos que acceden a la Universidad, por lo que lo consideramos opcional y lo dejamos para la sección 5.5 con el único ánimo de completar la exposición de esta sección.

Aplicando lo visto hasta el momento (si incluimos lo expuesto en la sección 5.5) podemos calcular la integral de cualquier función racional. Veámoslo con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.4.4** Calculemos

$$I = \int \frac{x^7 - 2x^6 - 4x^5 + 12x^4 - 3x^3 - x^2 + 25x - 26}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4}\,dx \tag{5.5}$$

Para resolver (5.5) primero debemos hacer la división entre el polinomio del numerador y el del denominador, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{x^7 - 2x^6 - 4x^5 + 12x^4 - 3x^3 - x^2 + 25x - 26}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4} &= x^2 + x - 2 \\ &+ \frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4}\end{aligned}$$

por lo que, si sustituimos en (5.5) obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x^2 + x - 2\right)\,dx + \int \frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4}\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int \frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4}\,dx \end{aligned} \tag{5.6}$$

Para resolver la integral de (5.6) debemos primero calcular las raíces del polinomio del denominador, y obtenemos[1]

$$x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1)(x^2+1)$$

de lo que deducimos que existen constantes $A, B, C, D, E$ tales que

$$\begin{aligned}\frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \\ &+ \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}\end{aligned}$$

[1] Para calcular las raíces del polinomio y factorizarlo utilizamos, por ejemplo, el método de Ruffini.

Multiplicando la igualdad anterior por $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4$ obtenemos

$$\begin{aligned}4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18 &= A(x-2)(x+1)(x^2+1) \\ &\quad + B(x+1)(x^2+1) + C(x-2)^2(x^2+1) \\ &\quad + (Dx+E)(x-2)^2(x+1) \\ &= (A+C+D)x^4 + (-A+B-4C-3D+E)x^3 \\ &\quad + (-A+B+5C-3E)x^2 + (-A+B-4C+4D)x \\ &\quad + (-2A+B+4C+4E)\end{aligned}$$

por lo que $A, B, C, D, E$ son solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{lcr} A+C+D & = & 4 \\ -A+B-4C-3D+E & = & -2 \\ -A+B+5C-3E & = & -3 \\ -A+B-4C+4D & = & 21 \\ -2A+B+4C+4E & = & -18 \end{array}\right.$$

es decir

$$A = 3, B = 4, C = -2, D = 3, E = -2$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 21x - 18}{x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4} &= \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \\ &\quad - \frac{2}{x+1} + \frac{3x-2}{x^2+1}\end{aligned}$$

y sustituyendo en (5.6) obtenemos

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \\ &\quad + \int \left[\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{3x-2}{x^2+1}\right] dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int \frac{3}{x-2}\, dx \\ &\quad + \int \frac{4}{(x-2)^2}\, dx - \int \frac{2}{x+1}\, dx + \int \frac{3x-2}{x^2+1}\, dx\end{aligned}$$

y utilizando las expresiones que hemos visto para las integrales de fracciones simples

$$\begin{aligned} I = {}& \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x-2| - \frac{4}{(x-2)} \\ & - 2\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x^2+1| - 2\arctan x + C \end{aligned}$$

## 5.5. Integrales de funciones racionales: Caso de raíces complejas múltiples

Recordamos que esta sección es opcional por no incluirse entre los conocimientos previos al acceso a la Universidad.

Para integrar la fracción simple $(Ax+B)/[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n$ tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx &= \int \left[\frac{A(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{A\alpha+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\right]dx \\ &= \int \frac{A(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx + \int \frac{A\alpha+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx \end{aligned}$$

y como para la primera de las integrales del último miembro de la igualdad tenemos que (haciendo el cambio de variable $u=(x-\alpha)^2+\beta^2$)

$$\int \frac{A(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx = \frac{A}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + C$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx &= \frac{A}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} \\ &\quad + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} \end{aligned}$$

La integral que queda pendiente

$$I_n = \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

puede calcularse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} &= \frac{1}{\beta^2}\int \frac{(x-\alpha)^2+\beta^2-(x-\alpha)^2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx \\ &= \frac{1}{\beta^2}\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} - \frac{1}{\beta^2}\int \frac{(x-\alpha)^2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde la primera de las integrales en la última igualdad es exactamente la misma que la de inicio (multiplicada por una constante) pero con el denominador elevado a $n-1$ en lugar de $n$, es decir, es $I_{n-1}$ multiplicada por una constante, y la segunda de las integrales se resuelve por partes, obteniendo de ese modo

$$\underbrace{\begin{array}{rcl} u = x-\alpha & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \dfrac{(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} & \Rightarrow & v = \dfrac{1}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} \end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-\alpha)^2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx &= \frac{x-\alpha}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} \\ &\quad - \int \frac{dx}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}\,dx \\ &= \frac{x-\alpha}{2(1-n)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1} \end{aligned} \tag{5.8}$$

y sustituyendo (5.8) en (5.7) obtenemos

$$I_n = \frac{x-\alpha}{2\beta^2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\beta^2} I_{n-1}$$

Este método concluye cuando llegamos hasta $I_1$, que como ya hemos visto es

$$I_1 = \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]} = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

**Observación 5.5.1** El método expuesto aquí para el cálculo de la primitiva de una fracción simple cuyo denominador tiene raíces complejas múltiples puede hacerse de forma más simple mediante la aplicación del *método de Hermite*. La explicación de este método es más propia de un primer curso universitario, por lo que no lo expondremos aquí.

**Ejemplo 5.5.1** Calculemos

$$I = \int \frac{2x^4 + 12x^2 - 11x + 5}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12}\, dx \tag{5.9}$$

Puesto que el polinomio del numerador en (5.9) es ya de menor grado que el del denominador, el siguiente paso es factorizar el polinomio del denominador y obtenemos

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12 = (x-3)(x^2+2)^2$$

que no tiene raíces en común con el polinomio del numerador. Así, existen constantes $A, B, C, D, E$ tales que

$$\frac{2x^4 + 12x^2 - 11x + 5}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

y multiplicando por $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12$ obtenemos

$$\begin{aligned} 2x^4 + 12x^2 - 11x + 5 &= A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x-3)(x^2+2) \\ &\quad + (Dx+E)(x-3) \\ &= (A+B)x^4 + (-3B+C)x^3 + (4A+2B-3C+D)x^2 \\ &\quad + (-6B+2C-3D+E)x + (4A-6C-3E) \end{aligned}$$

por lo que $A, B, C, D, E$ son solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcr} A + B & = & 2 \\ -3B + C & = & 0 \\ 4A + 2B - 3C + D & = & 12 \\ -6B + 2C - 3D + E & = & -11 \\ 4A - 6C - 3E & = & 5 \end{array} \right.$$

es decir

$$A = 2, B = 0, C = 0, D = 4, E = 1$$

Por tanto tenemos que

$$\frac{2x^4 + 12x^2 - 11x + 5}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12} = \frac{2}{x-3} + \frac{4x+1}{(x^2+2)^2}$$

y sustituyendo en (5.9) obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{x-3}\,dx + \int \frac{4x+1}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= 2\ln|x-3| + \int \frac{4x+1}{(x^2+2)^2}\,dx \end{aligned} \tag{5.10}$$

Para resolver esta última integral hacemos como hemos visto antes en el caso general de este tipo de fracción simple:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+1}{(x^2+2)^2}\,dx &= \int \frac{4x}{(x^2+2)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= \frac{-2}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2-x^2}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= \frac{-2}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= \frac{-2}{x^2+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx \end{aligned} \tag{5.11}$$

y esta última integral se resuelve por partes, de modo que si tomamos

$$\begin{aligned} u = x &\;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = \frac{x\,dx}{(x^2+2)^2} &\;\Rightarrow\; v = \frac{-1}{2(x^2+2)} \end{aligned}$$

obtendremos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx &= \frac{-x}{2(x^2+2)} + \int \frac{dx}{2(x^2+2)}\,dx \\ &= \frac{-x}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned} \tag{5.12}$$

Finalmente, si sustituimos ahora (5.12) en (5.11) y éste a su vez en (5.10), obtenemos

$$\begin{aligned} I &= 2\ln|x-3| - \frac{2}{x^2+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left[\frac{-x}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] + C \\ &= 2\ln|x-3| + \frac{x-8}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned}$$