Tema 3

Continuidad

3.1.- Definición de Continuidad

Una función se dice **continua en un punto** de su dominio, si existe el límite de la función y coincide con el valor de la función en dicho punto. Es decir:

$$f \text{ es continua en un punto } x_0 \text{ si : } \begin{cases} \text{existe } f(x_0) \\ \text{existe el } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Se dirá **continua por la izquierda** cuando el valor de la función en el punto coincida con el límite por la izquierda, y **continua por la derecha** cuando sean iguales el valor de la función y el límite por la derecha. Es evidente que una función será continua en un punto cuando lo sea a la vez por la derecha y por la izquierda.

Se dirá **continua en un intervalo abierto** (a, b) cuando es continua en cada punto de dicho intervalo y **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si además de ser continua en el abierto (a, b) es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

Son funciones continuas las polinómicas, las racionales (excepto en los ceros del denominador), las funciones trigonométricas, las exponenciales, las logarítmicas,... y las composiciones de éllas.

3.2.- Operaciones y Composición de Funciones Continuas

Como la continuidad lleva consigo la existencia de límite finito de una función en un punto, todas las propiedades de límites finitos pueden concluirse para funciones continuas. Por tanto, si f y g son dos funciones continua en un punto x_0 , entonces:

$f(x) \pm g(x)$ es continua en x_0

$f(x) \cdot g(x)$ es continua en x_0

$\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en x_0 siempre que $g(x_0) \neq 0$

$f(x)^{g(x)}$ es continua en x_0

Si $f(x)$ es continua en x_0 y $g(x)$ es continua en $y = f(x_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ f)(x)$ es continua en x_0.

3.3.- Tipos de Discontinuidades

Cuando una función no sea continua en un punto, se dirá **discontinua** en dicho punto. Pueden presentarse los siguientes tipos de discontinuidades:

Discontinuidad Evitable: la función tiene límite en el punto, pero éste no coincide con el valor de la función, bien por ser distinto o por no estar definido. Se llama evitable porque bastaría darle ese valor del límite para que hubiese continuidad. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero existe el $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (véase el ejercicio 3 del Tema 2). Si se define $f(0) = 1$, se trata de una función continua.

Discontinuidad de Primera Especie: existen los límites laterales, pero o son distintos, en cuyo caso se llama **Discontinuidad de Salto** (el **Salto** es la diferencia entre los límites laterales, pudiendo ser finito o infinito) o son infinitos del mismo signo que es llamada **Discontinuidad Infinita**.

Cuando al menos uno de los límites laterales es infinito se le puede llamar también **Discontinuidad Asintótica**.

Ejemplos:

1) $f(x) = \begin{cases} 4 - x & si\ x < 1 \\ 4x + x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 1$ porque el límite por la izquierda vale 3 y el límite por la derecha es igual a 5. El salto es 5-3 = 2.

2) $f(x) = \begin{cases} 4 - x & si\ x \leq 2 \\ \frac{1}{x - 2} & si\ x > 2 \end{cases}$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$ porque el límite por la izquierda vale 2 y el límite por la derecha es igual a $+\infty$. El salto es ∞.

3) También presenta discontinuidad de salto infinito la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 0$ porque los límites laterales son infinitos de signos contrarios.

4) La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, en $x = 0$, presenta discontinuidad infinita porque los límites laterales son infinitos del mismo signo.

Discontinuidad de Segunda Especie: se produce cuando no existe al menos uno de los límites laterales. Por ejemplo, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ presenta en $x = 0$ una discontinuidad de este tipo. Cuando la variable x se aproxima al cero la función oscila indefinidamente tomando infinitas veces todos los valores comprendidos entre -1 y +1, por tanto no existe el límite.

3.4.- Teoremas sobre continuidad

Teorema de Conservacion del Signo:

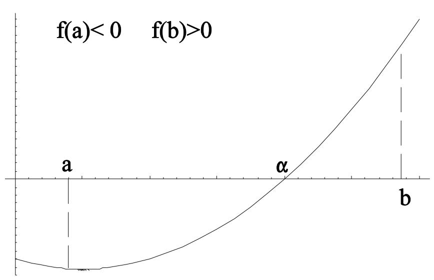
Si *f* es continua en un punto y su valor es positivo (negativo) en ese punto, también será positivo (negativo) en un entorno del punto.

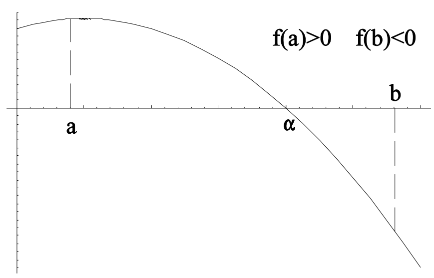
Teorema de Bolzano:

Si *f* es una función continua en un intervalo cerrado [*a, b*], y toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo, debe anularse en algún punto interior del intervalo. Es decir:

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continua en } [a,\ b] \\ f(a)\,f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \alpha \in (a,\ b)\ /\ f(\alpha) = 0$$

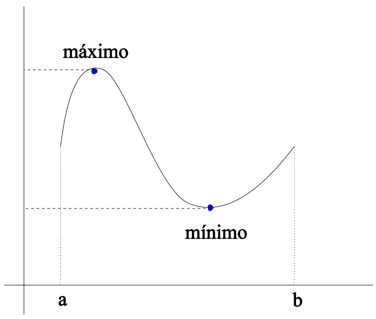
Gráficamente, puede observarse que para pasar del semiplano inferior al superior (o al contrario) sin que el trazo pierda continuidad, necesariamente debe cortarse al eje al menos una vez:

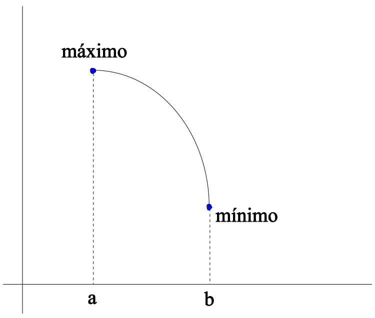




Teorema de Bolzano-Weierstrass :

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [*a, b*], alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.





Teorema de Darboux:

Si *f* es una función continua en un intervalo cerrado [*a, b*], alcanza todos los valores comprendidos entre el mínimo y el máximo de *f* en [a, b]. Es decir, si *m* y *M* son, respectivamente, el mínimo y el máximo de *f* en [a, b], dado un valor *c* tal que $m < c < M$, entonces deberá existir al menos un $\alpha \in [a, b]$ tal que $c = f(\alpha)$