Tema 1

Las Funciones y sus Gráficas

1.1.- Definición de Función y Conceptos Relacionados

Es muy frecuente, en geometría, en física, en economía, etc., hablar de ciertas magnitudes que dependen del valor de otras. Por ejemplo, el área de un cuadrado depende de la longitud de su lado, el espacio recorrido por un móvil en un tiempo determinado depende de su velocidad, el número de ventas de un producto depende de su precio, etc. Estas situaciones se describen matemáticamente mediante funciones.

Si X e Y son dos conjuntos y D un subconjunto de X, una **función** (o aplicación) f de $D \subset X$ en Y es una relación o correspondencia que a cada elemento $x \in D$ le asigna un único elemento de Y que se denotará por $f(x)$ y se llama imagen por f del elemento x. Para indicar una función se escribirá

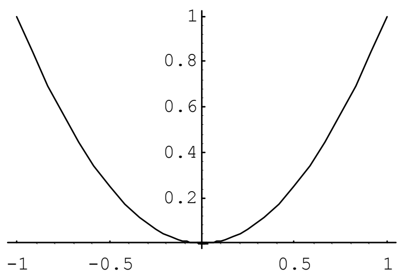
$$\begin{aligned} f:\ D \subset X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Suele decirse que x es la "variable independiente" y que y es la "variable dependiente" pues su valor se obtiene como consecuencia del que se le asigne a la x.

Al conjunto D se le llama **dominio,** campo de definición o campo de existencia de f. Se indica también por $D(f)$. Al conjunto $f(D) = \{f(x) \in Y \,/\, x \in D\}$ se le llama **imagen** o recorrido de f. Se llama **gráfica** de la función al conjunto de los pares ordenados $\{(x, f(x)) \in X \times Y \,/\, x \in D\}$

Si $X = Y = \mathbb{R}$ se llama **función real de variable real.** Se tratará, por tanto, de una aplicación $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La forma más simple de describir una función es mediante una expresión o fórmula matemática como, por ejemplo, $f(x) = x^2$. Esta función está definida para cualquier número real, es decir, su dominio es $D = \mathbb{R}$. Toma valores mayores o iguales que cero por tratarse de un cuadrado, por lo que $f(D) = [0, \infty)$. Su gráfica será el conjunto de pares ordenados de la forma (x, x^2) que constituyen la parábola:



TIPOS DE FUNCIONES:

Se llaman funciones algebraicas a aquéllas que pueden expresarse en términos de un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces. Por ejemplo $y = \frac{3x^2 - 4}{2x + 1}$ es algebraica.

Las funciones algebraicas más comunes son las funciones polinómicas de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde el entero positivo n es el grado de la función polinómica, y las funciones racionales (expresables como cocientes de polinomios). Las funciones que no son algebraicas se llaman trascendentes. Es decir, son funciones trascendentes las trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Dada una función f, real de variable real, se dirá que f es:

Creciente en un subconjunto $A \subset D$ si dados $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

Decreciente en un subconjunto $A \subset D$ si dados $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

Creciente en un punto x_0 *si* $\exists\, \delta > 0 \,/\, f(x_0 - \delta) \le f(x_0) \le f(x_0 + \delta)$

Decreciente en un punto x_0 *si* $\exists\, \delta > 0 \,/\, f(x_0 - \delta) \ge f(x_0) \ge f(x_0 + \delta)$

Dada una función f, real de variable real, se dirá que:

f presenta un **mínimo local** en x_0 *si* $\exists\, \delta > 0 \,/\, f(x) \ge f(x_0)\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

f presenta un **máximo local** en x_0 *si* $\exists\, \delta > 0 \,/\, f(x) \le f(x_0)\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

En ambos casos se dirá que la función posee un **extremo relativo** en el punto de abscisa x_0, es decir en el punto del plano $(x_0, f(x_0))$

Se hablará de **extremos absolutos** cuando la función alcance su menor valor (**mínimo absoluto**)o su mayor valor (**máximo absoluto**) .

Dada una función f, real de variable real, se dirá que:

f está **acotada inferiormente** en un dominio D si $\exists\ k_1 \in \mathbb{R}\ /\ f(x) \geq k_1,\ \forall\ x \in D$

f está **acotada superiormente** en un dominio D si $\exists\ k_2 \in \mathbb{R}\ /\ f(x) \leq k_2,\ \forall\ x \in D$

f está **acotada** en un dominio D, si lo está inferior y superiormente. Puede expresarse también si $\exists\ k \in \mathbb{R}\ /\ |f(x)| \leq k,\ \forall\ x \in D$, porque $|f(x)| \leq k,\ \forall\ x \in D \Leftrightarrow -k \leq f(x) \leq k,\ \forall\ x \in D$.

1.2.- Operaciones con Funciones. Composición de Funciones

Sean f y g dos funciones con el mismo dominio $D \subset \mathbb{R}$. Para cada $x \in D$ de definen la **suma**, **diferencia** y **producto** de f y g mediante las expresiones:

$$\begin{gathered}(f+g)(x) = f(x) + g(x)\\ (f-g)(x) = f(x) - g(x)\\ (f\,.\,g)(x) = f(x)\,.\,g(x)\end{gathered}$$

De la misma forma, para cada x tal que $g(x) \neq 0$ se define el **cociente** como $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

Se hablará de la composición de dos funciones f y g cuando las salidas de f sean usadas como entradas de g. Si X, Y, Z son conjuntos, f una función con dominio $D(f) \subset X$ en Y y g una función con dominio $D(g) \subset Y$ en Z. Suponiendo que la imagen de f está contenida en el dominio de g, es decir, $I(f) \subset D(g)$, se define la **composición de** las **funciones** f y g, y se representa por $g \circ f$, como la función de $D(f)$ en Z que asigna a cada elemento $x \in D(f)$ el elemento del conjunto Z, $g[f(x)]$.

La composición de funciones es asociativa, es decir, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ siempre que se trate de tres funciones que puedan componerse. Pero conviene señalar que no es conmutativa, porque en principio la existencia de $g \circ f$ no implica la de $f \circ g$; pero aun cuando ambas composiciones existan, no tienen por qué ser iguales. Así, por ejemplo, para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sin x$ se tendría :

$$\left.\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g(x^2) = \sin(x^2)\\ (f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f(\sin x) = \sin^2 x\end{aligned}\right.\quad y\ \sin(x^2) \neq \sin^2 x\ \ (salvo\ para\ x = 0)$$

Se llama **función identidad** a la que asigna a cada elemento x él mismo. Es evidente que al componerla con cualquier otra función no la altera. Es decir, la función identidad es el elemento neutro de la composición de funciones.

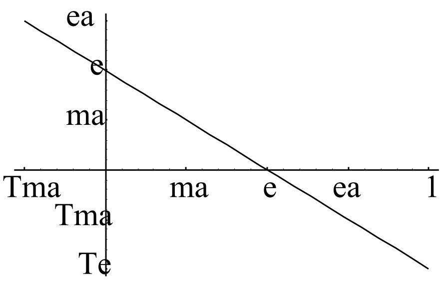
Si dada una función f, existe otra función que al componerla con ella da como resultado la función identidad, se le llama **función inversa** de f , representándose por f^{-1} . Es importante distinguir entre la función inversa (inversa para la composición) de la inversa para el producto, que sería una función que al multiplicarla con la función dada, resultase el elemento neutro para el producto (la función constante que asigna a cada x el número real 1). Por ejemplo, para la función $f(x) = \sin x$ su función inversa es $f^{-1}(x) = \arcsin x$, mientras que la inversa para el producto es cosec x porque $\sin x$ cosec $x = 1$.

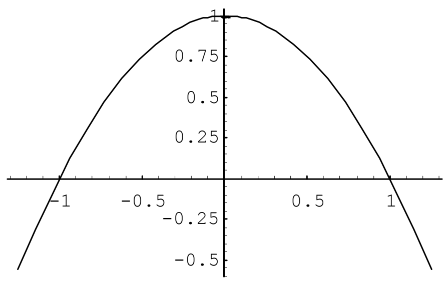
1.3.- Gráfica de una Función

La representación más completa de una función puede obtenerse dibujando su gráfica en un sistema de dos coordenadas. Tomando el *eje Ox* para representar la variable independiente (originales) , y el *eje Oy* para la variable dependiente (imágenes) , los puntos de coordenadas *(x,f(x))* constituirán una curva en dicho sistema que será la gráfica de la función.

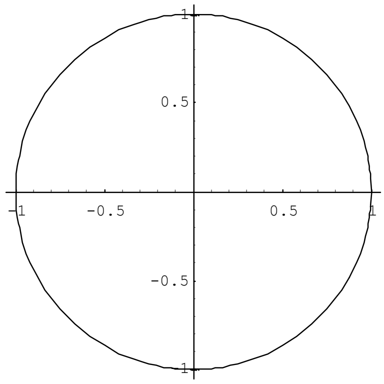
No todas las curvas representan una función. Para que así sea es necesario que satisfagan el *test de la vertical*: Una curva representa una función si cualquier recta paralela al *eje O y* corta a la gráfica a lo sumo en un punto (cada original tiene una sola imagen). En este caso, el dominio estará constituido por los valores de x en los que la vertical corta a la gráfica.

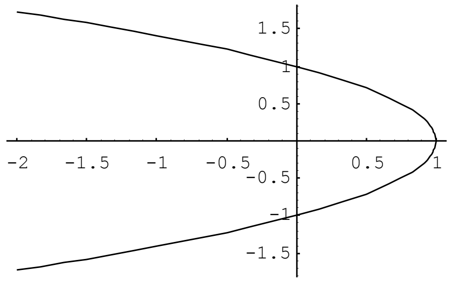
Por ejemplo, la recta de ecuación $y = 1 - x$ describe una función y lo mismo ocurre con la parábola de ecuación $y = 1 - x^2$:





Sin embargo, no ocurre lo mismo para la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 1$ y la parábola de ecuación $x + y^2 = 1$ cuyas gráficas son:





Para obtener la representación gráfica de una función deberán seguirse unas pautas que se describirán más adelante en el Tema 4.

Definición.-

Se dice que f es una **función par** y su **gráfica simétrica respecto del eje Oy** si verifica:

1) $x \in D \Rightarrow -x \in D$

2) $f(-x) = f(x)$

Se dice que f es una **función impar** y su **gráfica simétrica respecto del origen** si verifica:

1) $x \in D \Rightarrow -x \in D$

2) $f(-x) = -f(x)$