Tema 4

Derivación

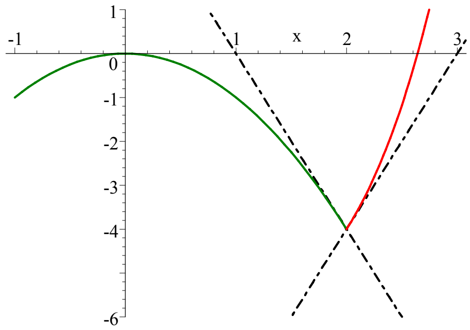
Ejercicios resueltos

Derivación

Ejercicio 1 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:
$f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x \leq 2 \\ (x-2)\,2^x - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$ en el punto $x = 2$.

Solución:
Estudiemos primero los límites laterales en $x = 2$:
$f(2^-) = \lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0} -(2-h)^2 =$
$\lim_{h\to 0} -4 + 4h - h^2 = -4$
$f(2^+) = \lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0} (2+h-2)\,2^{2+h} - 4 =$
$\lim_{h\to 0} h2^{2+h} - 4 = -4$
Por tanto $f(2^-) = f(2^+) = f(2)$, y la función es continua en $x = 2$
Derivadas laterales en $x = 2$:
$f'(2^-) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(2-h)^2-4}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h-h^2}{-h} =$
$\lim_{h\to 0} -4 + h = -4$
$f'(2^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h-2)2^{2+h}-4-(-4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h2^{2+h}}{h} =$
$\lim_{h\to 0} 2^{2+h} = 4$

Las derivadas laterales son distinitas por lo que la función carece de derivada en $x = 2$, esto significa que hay dos tangentes distintas en el punto $(2, -4)$



■

Ejercicio 2 Calcular la derivada de $y = x^x$. Se supone $x > 0$.

Solución:
Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros:

$$\ln y = x \ln x$$

Derivando ambos miembros respecto de x, teniendo en cuenta la regla de la cadena, que nos dice que al ser y función de x:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Despejando y':

$$y' = (1 + \ln x)\, y$$

Finalmente reemplazando el valor de y:

$$y' = x^x\,(1 + \ln x)$$

■

Ejercicio 3 Una epidemia, al cabo de t días de su inicio, infecta a un número de personas dado por $p = 30t^2 + 100t$. ¿Cuantas personas infecta el 5^o día?

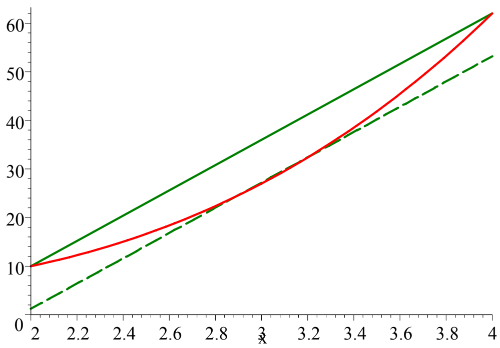
Solución:
El número de personas infectado por día vendrá dado por: $\frac{dp}{dt} = 60t + 100$, por lo que en el día $t = 5$, el número de infectados será $60 \cdot 5 + 100 = 400$ personas. ■

Ejercicio 4 La curva de ecuación $y = x^3 - 2x + 6$, pasa por los puntos $P\,(2, 10)$ y $Q\,(4, 62)$, Si el segmento $\overline{PQ}$ se desplaza paralelamente a sí mismo, corta a la curva en varios puntos, o en ninguno; si la corta en un único punto ¿cual es?

Solución:
Podría solucionarse determinando la ecuación de la recta PQ, resolver el sistema de dos ecuaciones formado por esta ecuación y la de la curva, e igualar las posibles soluciones.

Otra posibilidad es usar el teorema de valor medio de Lagrange, que asegura que la tangente en un punto de la curva, es paralela a la cuerda que une los extremos del arco en cuestión:

Si $P\,(2,10)$, y $Q\,(4,62)$ son los extremos del arco de curva, el teorema afirma que la abscisa c del punto mencionado, verifica $f'\,(c)=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{62-10}{4-2}=26$ y, dado que $f'\,(x)=3x^2-2$, $f'\,(c)=3c^2-2=26\Rightarrow c=\sqrt{\frac{26}{3}}=2.94$, el punto buscado es $(2.94,25.63)$



■

Ejercicio 5 Mediante la derivación de la función inversa, hallar la derivada de $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$

Solución:
$y=f\,(x)=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}\Rightarrow\cos y=\frac{1-x}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}\cos y=1-x\Rightarrow x=1-\sqrt{2}\cos y$

Por tanto $y=f\,(x)$ es la función inversa de $g\,(y)=1-\sqrt{2}\cos y$, así que si $g'\,(y)=\frac{1}{f'(x)}$ será $f'\,(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{g'(f(x))}$ o bien: $y'=\frac{1}{\sqrt{2}\sin y}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{(1-x)^2}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+2x-x^2}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. ■

Representación gráfica de funciones y optimización.

Ejercicio 6 Determinar los extremos, si los hay, de la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

Solución:
$f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2} = 1 - (x-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$

Esta derivada nunca se anula, y en ausencia de puntos críticos, debe estudiarse el comportamiento de la derivada, en torno a los puntos de discontinuidad de la derivada, en este caso $x = 1$.

$f'(1^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{(1+h-1)^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} -\sqrt[3]{\frac{1}{h}} = -\infty$

$f'(1^-) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{(1-h-1)^2}-1}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt[3]{h^2}}{-h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{h}} = +\infty$

Así esta función carece de derivada en $x = 1$ por lo que:

$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ si $x \neq 1$.

Pero antes del punto de discontinuidad, es decir para $x < 1$:

$x < 1 \Rightarrow x = 1 - h,\ (h > 0)$, y

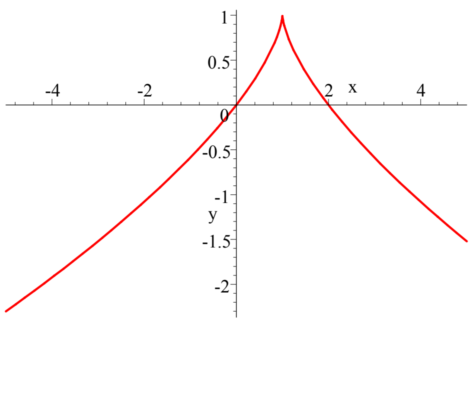
$f'(1-h) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{1-h-1}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{-h}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{h}} > 0$

Después del punto de discontinuidad, es decir para $x > 1$:

$x > 1 \Rightarrow x = 1 + h,\ (h > 0)$, y

$f'(1+h) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{1+h-1}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{+h}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{h}} < 0$

Por tanto f crece antes de $x = 1$, y decrece con $x > 1$, por lo que, siendo continua en $x = 1$, podemos asegurar que f tiene un máximo en $x = 1$



■

Ejercicio 7 Determinar los extremos de la función $f(x) = x^4 e^{1-x}$, supuesto que existan, no usar el criterio de la 1^a derivada.

Solución:

f está definida y es derivable, para todo x.

Los posibles extremos corresponden a valores que anulan la 1^a derivada:

$$f'(x) = 4x^3e^{1-x} - x^4e^{1-x} = x^3e^{1-x}(4-x)$$

Por tanto puede haber extremos en $x = 4$, y $x = 0$

$f''(x) = 3x^2e^{1-x}(4-x) - x^3e^{1-x}(4-x) - x^3e^{1-x} = x^2e^{1-x}(12 - 8x + x^2)$

$f''(0) = 0,\ f''(4) = -16e^{-3}(-4) > 0$

Así hay un mínimo en $(4, 256e^{-3})$.

Respecto de $x = 0$ son nulas todas las derivadas en las que aparece x, como factor, con exponente > 0:

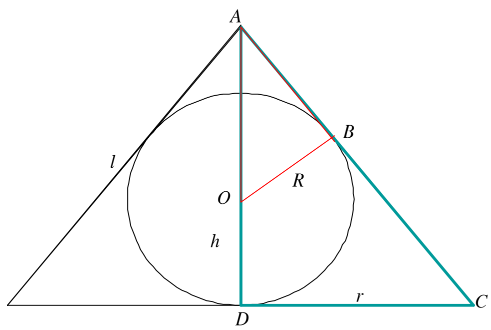
$f'''(x) = 2xe^{1-x}(12 - 8x + x^2) - x^2e^{1-x}(12 - 8x + x^2) + x^2e^{1-x}(-8 + 2x) =$
$xe^{1-x}[2(12 - 8x + x^2) - x(12 - 8x + x^2 + 8 - 2x)] =$
$xe^{1-x}(24 - 36x + 12x^2 - x^3)$

$f^{iv}(x) = e^{1-x}(24 - 36x + 12x^2 - x^3) - xe^{1-x}(24 - 36x + 12x^2 - x^3) +$
$xe^{1-x}(-36 + 24x - 3x^2) =$
$e^{1-x}[24 - 36x + 12x^2 - x^3 - x(24 - 36x + 12x^2 - x^3 + 36 - 24x + 3x^2)] =$
$e^{1-x}[24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4]$

Resulta que $f^{iv}(0) = 24e > 0$, por tanto hay un mínimo en $(0, 0)$, cosa que era de esperar ya que $x^4e^{1-x} \geq 0$ ■

Ejercicio 8 Determinar las dimensiones del cono de volumen mínimo circunscrito a una esfera de radio R.

Solución:



El volumen del cono es $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Los triángulos AOB y ADC son semejantes, la relación de semejanza: $\frac{\overline{DC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, puede escribirse $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2}}$ ó $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{\left(\overline{AD} - \overline{OD}\right)^2 - R^2}}$ ó $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{(h-R)^2 - R^2}}$ con ello $r = \frac{Rh}{\sqrt{h^2 - 2hR}}$, y

$v = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2h^2}{h^2-2hR}h = \frac{\pi R^2}{3}\frac{h^3}{h^2-2hR}$

Extremos de v:

$v' = \frac{\pi R^2}{3}\frac{3h^2\left(h^2-2hR\right)-(2h-2R)h^3}{\left(h^2-2hR\right)^2} = \frac{\pi R^2}{3}\frac{h^3(3h-6R-2h+2R)}{\left(h^2-2hR\right)^2} = \frac{\pi R^2}{3}\frac{h^3(h-4R)}{\left(h^2-2hR\right)^2}$

$v' = 0 \Rightarrow h^3\left(h-4R\right) \Rightarrow h = \begin{cases} 0 \\ 4R \end{cases}$

Dado que, evidentemente $h > 0$, debe excluirse $h = 0$, y el signo de v' depende de $h - 4R$:

Para $h < 4R$ $v' < 0$, por lo que v decrece

Para $h > 4R$ $v' > 0$, por lo que v crece

Por tanto, usando el criterio de la primera derivada, en $h = 4R$ hay un mínimo.

$h = 4R \Rightarrow r = \frac{R4R}{\sqrt{16R^2-8R^2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$,

Con ello el volumen del cono será $v = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\left(R^2 2\right)(4R)}{3} = \frac{8\pi R^3}{3}$, que es el doble del volumen de la esfera $\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)$. ■

Ejercicio 9 Un servicio de correos acepta paquetes, en forma de paralelepípedo, a condición de que la suma de la longitud y el doble de la suma de anchura y altura, sea de un máximo de 183 cm. Suponiendo igual anchura que altura ¿Cuáles deben ser las dimensiones del paquete para que tenga la máxima capacidad?

Solución:

Si la capacidad, o volumen del paquete es v, la anchura x y la longitud y, tendremos: $v = x^2y$, además debe ser $183 = 2x + y$, por tanto: $v = x^2\left(183 - 2x\right) = 183x^2 - 2x^3$.

Determinación del máximo de v:

$v' = 366x - 6x^2$, $v' = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 61$

La solución $x = 0$ está excluída (no habría caja), para $x = 61$, dado que $v'' = 366 - 12x$ tenemos $v''\left(61\right) = 366 - 12 \times 61 = -366 < 0$, que efectivamente corresponde a un máximo, con $y = 183 - 2 \times 61 = 61$. El volumen máximo permitido en las condiciones dadas es $61 \times 61 \times 61 = 226\,981 cm^3$ ■

Ejercicio 10 Estudiar continuidad, puntos de corte con los ejes, asíntotas, e intervalos de monotonía de la función de ecuación $f\left(x\right) = \frac{(x-1)e^x}{e^x-1}$

Solución:

Se trata de una función continua, y derivable, en todo $\mathbb{R} - \{0\}$.

Es posible que sea discontinua en $x = 0$, cosa que se debe verificar estudiando los límites laterales:

$\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right) = \lim_{h\to 0} f\left(h\right) = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)e^h}{e^h-1} = \frac{-1}{0} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-h) = \lim_{h\to 0} \frac{(-h-1)e^{-h}}{e^{-h}-1} = \lim_{h\to 0} \frac{-1-h}{1-e^h} =$
$\lim_{h\to 0} \frac{1+h}{e^h-1} = \infty$

Así que efectivamente es discontinua en $x = 0$, por tanto tampoco será derivable en tal punto.

Puntos de corte con los ejes: corta a $\overline{OX}$ en $x = 1$

Asíntotas:

Es claro que hay una asíntota vertical en $x = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^x}{e^x} = +\infty$

Esto significa que no hay asíntota horizontal para $x > 0$.

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(-x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(-x-1)e^{-x}}{e^{-x}-1} =$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{-x-1}{1-e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{e^x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Así pues hay una asíntota horizontal $y = 0$, en $x = -\infty$

$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{(x-1)e^x}{e^x-1}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)e^x}{(e^x-1)x} =$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x} \frac{e^x}{e^x-1} = 1$

$n = \lim_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)e^x}{e^x-1} - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)e^x - x(e^x-1)}{e^x-1} =$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{e^x}-1}{1-\frac{1}{e^x}} = -1$

Por tanto hay asíntota oblícua (en $x \to \infty$): $y = x - 1$

Debe quedar claro que el hecho de haber asíntota horizontal imposibilita la existencia de asíntota oblícua, pero sólo por el lado donde hay asíntota horizontal, en este caso la hay en $x = -\infty$, y no puede haber asíntota oblícua por este lado; pero no en $x = \infty$, por lo que sí cabe asíntota oblícua por este lado.

Cortes de la curva $y = \frac{(x-1)e^x}{e^x-1}$ con las asíntotas: $(-\infty, 0)$, $(0^+, -\infty)$ y $(0^-, +\infty)$,

$\begin{cases} y = \frac{(x-1)e^x}{e^x-1} \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{(x-1)e^x}{e^x-1} = x - 1 \Rightarrow (x-1)e^x = (x-1)e^x - x + 1 \Rightarrow$
$x = 1,\ y = 0$

Posición respecto de la asíntota oblícua:

$\frac{(x-1)e^x}{e^x-1} - (x-1) = \frac{(x-1)(e^x-1)}{e^x-1} = x - 1 \Rightarrow$

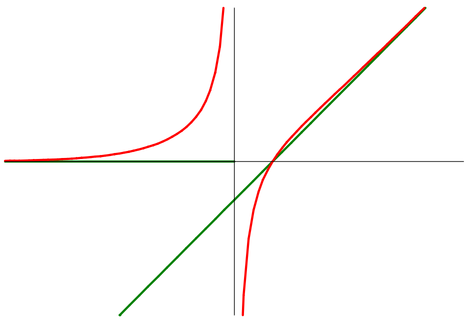
La ordenada de la curva es mayor que la de la asíntota para $x > 1$

La ordenada de la curva es menor que la de la asíntota para $x < 1$

Intervalos de monotonía:

$y' = \frac{xe^x(e^x-1) - e^{2x}(x-1)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x(e^x-x)}{(e^x-1)^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, y la función es siempre creciente.

La curva viene dada por la gráfica siguiente: ■



Ejercicio 11 Estudiar y representar gráficamente $f(x) = (x+2)\,e^{\frac{1}{x}}$

Solución:

Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} (h+2)\,e^{\frac{1}{h}} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} (-h+2)\,e^{\frac{1}{-h}} = \lim_{h\to 0} \frac{-h+2}{e^{\frac{1}{h}}} = 0$

De lo anterior resulta que hay una asíntota vertical en $x = 0$

Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)\,e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot e^0 = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)\,e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} (-x+2)\,e^{\frac{1}{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+2}{e^{\frac{1}{x}}} = -\infty$

Asíntotas oblícuas:

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 1$

$n = \lim_{x\to+\infty} (x+2)\,e^{\frac{1}{x}} - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 2e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} + 2e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} + 2 = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} + 2 = 3$

Así $y = x + 3$ es una asíntota oblícua

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x+2)e^{\frac{1}{-x}}}{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = 1$

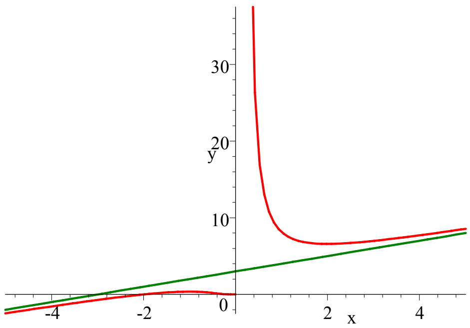
Que es la misma m que antes.

$f'(x) = \frac{d}{dx}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{x+2}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2-x-2}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x^2-x-2\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(x+1)(x-2)$

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1, 2)$, y como es continua en todo el dominio, hay máximo en $x = -1$ y mínimo en $x = 2$.

$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x^2-x-2\right) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}\left(x^2-x-2\right) - 2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\left(x^2-x-2\right) + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(2x-1) = e^{\frac{1}{x}}\frac{5x+2}{x^4} \Rightarrow$

$f''(x) > 0$ para $x > -\frac{2}{5}$ concavidad $\cup$, $f''(x) < 0$ para $x < -\frac{2}{5}$ concavidad $\cap$ $\blacksquare$



Ejercicios propuestos

Las soluciones se encuentran al final

Derivación

1. Hallar por medio de la definición de derivada, la derivada de $y = \sqrt{x}$

2. Hallar las derivadas laterales de $y = \sqrt{\left|\frac{x^2+2x}{x-3}\right|}$ en $x = -2$.

3. Hallar la derivada de $y = \ln(\ln(\ln x))$ supuesto $x > 0$.

4. Comprobar que, siendo u_1, u_2, v_1, v_2, funciones de x, la derivada de $y = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ es $y' = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}$.
   Este resultado es válido para determinantes de orden arbitrario (finito).

5. Dar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^x$ en el punto $(2, 4)$.

6. Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + x^2 - 2x}{x\cos x + (x-1)\sin x}$

7. Calcular: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

8. Calcular: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan 3x$

9. Calcular: $\lim_{x\to 0} x^x$, con $x > 0$

10. Hallar la derivada de $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ supuesto a constante y $a > 0$.

11. Mediante la derivación de la función inversa, hallar la derivada de $y = \arctan \frac{x^2}{a}$

Representación gráfica de funciones y optimización.

12. Dar las dimensiones del cilindro recto, de volumen máximo, inscrito en una esfera de radio R.

13 Dar las dimensiones del cilindro recto de volumen máximo inscrito en un cono circular de altura h, y radio r.

14. Un barco ha de remontar una distancia d en un rio, si la velocidad de la corriente es u, y el consumo de combustible es directamente proporcional al tiempo empleado y al cubo de u; determinar la velocidad v, del barco, que implica el mínimo gasto de combustible.

15. Se pretende construir un campo de deportes, cuyo perímetro sea una pista de 400 m. Si el campo ha de tener forma de rectángulo con un semicírculo adosado a cada uno de los lados menores ¿Con qué dimensiones se consigue el campo de mayor superficie?

16. Se permite ocupar uno o dos terrenos, en caso de ser dos uno cuadrado y otro circular, separados; con la condición de que la cerca que limite el conjunto de los dos tenga una longitud l dada. ¿Cuales son las dimensiones que dan máxima y mínima superficie de terreno?

Estudiar y representar gráficamente las curvas cuyas ecuaciones se dan a continuación:

17. $y = \frac{5x^4+1}{x^2+1}$

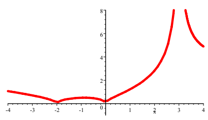
18. $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

19. $y = +\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-x}}$

20. $y = x + \frac{1}{x}$

Soluciones a los ejercicios propuestos

1. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $y'\left(-2^+\right) = \sqrt{\frac{1}{5}}$ $y'\left(-2^+\right) = -\sqrt{\frac{1}{5}}$, gráfica: 

3. $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$

4.

5. $y - 4 = 4\left(1 + \ln 2\right)\left(x - 2\right)$

6. 1.

7. 0.

8. 0.

9. 1.

10. $a^a x^{a^a-1} + a^{x^a} a x^{a-1} \ln a + a^{a^x} a^x a^{a^x} \ln^2 a$

11. $\frac{2ax}{x^4+a^2}$

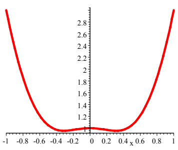
12. Altura $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, radio de la base $\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$

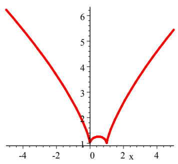
13. Altura $\frac{h}{3}$, radio $\frac{2r}{3}$

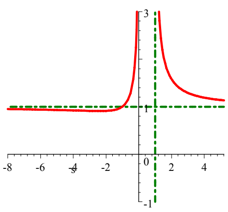
14. $v = \frac{3}{2}u$

15. Lados del rectángulo 100m., radio de semicírculo $\frac{100}{\pi}$m

16. Máximo: un círculo de radio $\frac{l}{2\pi}$, mínimo: círculo de radio $\frac{l}{2\pi+8}$, y cuadrado de lado $\frac{l}{\pi+4}$

17. 

18. 

19. 

20.