Tema 1

Las Funciones y sus Gráficas

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

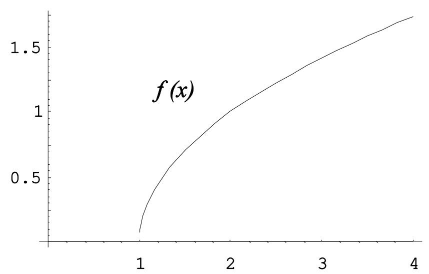
Halla dominio e imagen de las funciones $f(x) = +\sqrt{x-1}$ y $g(x) = \begin{cases} 1-x & si\ x<1 \\ +\sqrt{x-1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

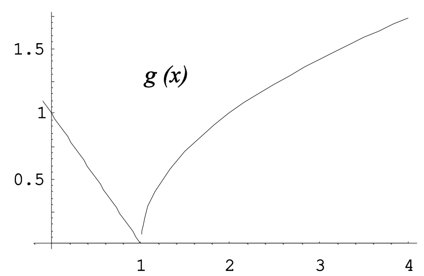
Solución:

Como $+\sqrt{x-1}$ no está definido si $x-1<0$, es decir, si $x<1 \Rightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 1\}$
El recorrido o imagen será el conjunto de todos los reales positivos incluído el cero.

La función $g(x)$ está definida tanto para los $x<1$ como para los $x \geq 1$, luego $D(g) = \mathbb{R}$. En la porción $x \geq 1$ del dominio, la función se comporta como $f(x)$ y para los $x<1$, el valor de $1-x$ es positivo y, por tanto, el recorrido de la función es $[0, \infty)$.

Estas conclusiones pueden visualizarse en las gráficas siguientes:





Ejercicio 2

¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones del ejercicio anterior? ¿Presentan algún extremo local?

Solución:

La función $f(x)$ es creciente en todo su dominio, es decir, en $[1, \infty)$. El mínimo se alcanza en el punto $(1, 0)$ y el máximo no se alcanza porque crece indefinidamente. Puede decirse también que está acotada inferior pero no superiormente.

La función $g(x)$ es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$. No tiene máximo, y el mínimo coincide con el de la función $f(x)$.

Nota: En el Tema 4 se estudia la caracterización del crecimiento/decrecimiento de una función por el signo de su derivada. También se dan criterios para el estudio de los extremos locales.

Ejercicio 3

Sabiendo que $-1 \le \sin x \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, halla el dominio de la función $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{x+1}$

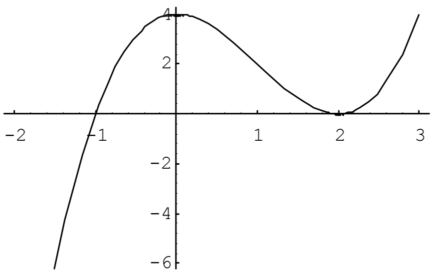
Solución:

Si $y = arcsin \dfrac{x}{x+1}$ significa que $\sin y = \dfrac{x}{x+1}$ por lo que deberá ser $-1 \le \dfrac{x}{x+1} \le 1$ ó, lo que es lo mismo, $-x - 1 \le x \le x + 1$. La primera parte de la desigualdad se verifica siempre que $-1 \le 2x$ y la segunda para cualquier valor de x. Luego $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \ge -1/2\} = [-1/2, \infty)$

Ejercicio 4

Observando la siguiente gráfica, que corresponde a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos.

Solución:



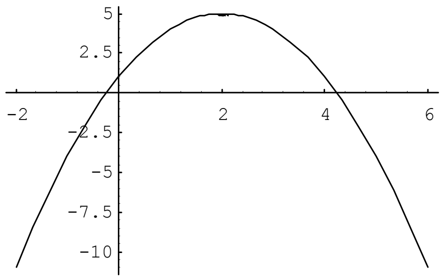
Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Decrece en $(0, 2)$
Máximo local en el punto de coordenadas $(0, 4)$
Mínimo local en el punto de coordenadas $(2, 0)$

Ejercicio 5

¿Presenta la función $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ algún extremo en $x_0 = 2$?

Solución:

La función puede expresarse como $f(x) = -(x-2)^2 + 5$, con lo que si $x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ tomará el mayor valor posible (en cualquier otro caso al 5 se le restaría una cantidad positiva). Luego el punto (0, 5) es un máximo absoluto.

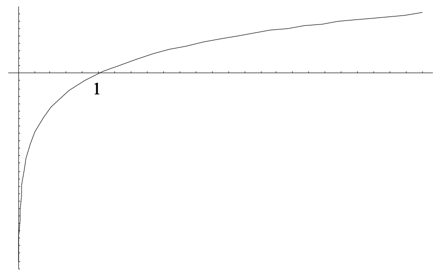


Ejercicio 6

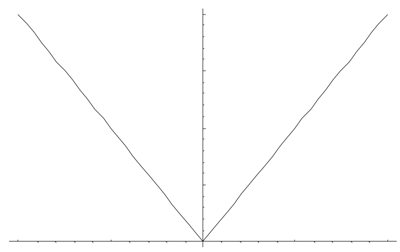
Estudia la acotación de las funciones a) $f(x) = Lx$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = sinx$

Solución:

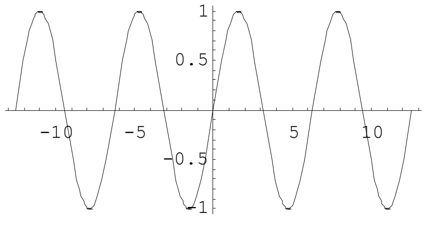
a) $f(x) = Lx$ no está acotada ni inferior ni superiormente. Como se puede observar en la gráfica, si $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$ y si $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$



b) $f(x) = |x|$ está acotada inferiormente porque $0 \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$. Pero no está acotada superiormente, porque si $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$



c) $f(x) = sinx$ está acotada, es decir, inferior y superiormente porque: $-1 \leq sinx \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.



Ejercicio 7

Comprueba que las funciones $f(x) = 2x^3 - 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$ son inversas.

Solución:

Se verá que al componerlas se obtiene la función identidad:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x^3 - 1) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 = (x+1) - 1 = x$$

Ejercicio 8

Dada la función $f(x) = +\sqrt{2x - 3}$ halla su inversa, si existe.

Solución:

Si $y = +\sqrt{2x - 3} \Rightarrow y^2 = 2x - 3 \Rightarrow y^2 + 3 = 2x \Rightarrow \dfrac{y^2 + 3}{2} = x$. Por tanto, la inversa será $f^{-1}(y) = \dfrac{y^2 + 3}{2}$ o, lo que es lo mismo, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 3}{2}$

Ejercicio 9

Indica si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ b) $g(x) = x^4 + |x|$ c) $h(x) = \sin(x) + \cos(x)$

Solución:

a) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$, luego es impar y su gráfica simétrica respecto al origen.

b) $g(-x) = (-x)^4 + |-x| = x^4 + |x| = g(x)$ luego es par y su gráfica simétrica respecto al eje Oy.

c) $h(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin(x) + \cos(x)$, por tanto no es par ni impar porque no coincide con la función original ni con su opuesta. Su gráfica no presenta simetrías.

Ejercicio 10

¿Presenta alguna simetría la función $f(x) = L\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$?

Solución:

Como $f(-x) = L\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = L\left[\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1}\right] = -L\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -f(x)$, la función es impar y su gráfica simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Ejercicios Propuestos

(Las soluciones se encuentran al final)

1.- Dada la función $f(x) = x^2 + 7$, calcula: $f(a-1)$ y $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\Delta x \neq 0$

2.- Halla el dominio de $f(x) = L\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

3.- Estudia las posibles simetrías de las funciones a) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + x}$ b) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

4.- Demuestra que $f(x) + f(-x)$ es una función par y que $f(x) - f(-x)$ es impar.

5.- Determina el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{L(1-x)} + \sqrt{x+2}$

6.- Halla los valores de a y b para los que $f(x) = ax^2 + bx + 5$ verifica $f(x+1) = f(x) + 8x + 3$

7.- Sean las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \sin x$

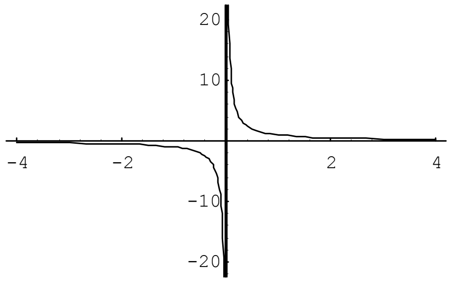
a) Determina las funciones compuestas $(g \circ f)$, $(f \circ g)$, $(f \circ h)$, $(f \circ g \circ h)$

b) Expresa en función de f, g y h las funciones $2^{\sin x}$, $\sin(2^x)$, $\sin(x^2)$, 2^{2^x} .

8.- Halla la función inversa de cada una de las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$, $g(x) = \arctan(3x)$, $h(x) = L\left(\frac{x}{2}\right)$

9.- Estudia las simetrías, intervalos de crecimiento y decrecimiento y acotación de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica es:



10.- Expresa la función $f(x) = 3 - 2x + x^4 - 5x^7$ como suma de una función par y otra impar.

Soluciones:

1.- $f(a - 1) = a^2 - 2a + 8$ y $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

2.- $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

3.- a) impar b) par

5.- $(-2, 0) \cup (0, 1)$

6.- $a = 4$ y $b = -1$

7.- a) $(g \circ f) = 2^{x^2}$, $(f \circ g) = 2^{2x}$, $(f \circ h) = \sin^2 x$, $(f \circ g \circ h) = 2^{2 \sin x}$

b) $2^{\sin x} = g \circ h$, $\sin(2^x) = h \circ g$, $\sin(x^2) = h \circ f$, $2^{2^x} = g \circ g$

8.- $f^{-1}(x) = f(x)$, $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{3} \tan x$, $h^{-1}(x) = 2e^x$

9.- Es impar, decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y no está acotada inferior ni superiormente.

10.- $f(x) = p(x) + i(x)$ siendo $p(x) = 3 + x^4$, $i(x) = -2x - 5x^7$