Apéndice C

Números Reales y Complejos

Ejercicios resueltos

1. Halla los números reales que cumplen la condición $|a| = a + 3$.

Si $a \geq 0$: $|a| = a = a + 3 \Rightarrow 0 = 3$. No existe solución.

Si $a < 0$: $|a| = -a = a + 3 \Rightarrow a = -\dfrac{3}{2}$.

2. Halla todos los números $r \in \mathbb{R}$ tales que $|2r - 1| < 4$.

a) Si $2r - 1 \geq 0$:

$$|2r-1| = 2r - 1 \Rightarrow 0 \leq 2r - 1 < 4 \Rightarrow \begin{cases} 2r - 1 \geq 0 \Rightarrow r \geq 1/2 \\ 2r - 1 < 4 \Rightarrow r < 5/2 \end{cases} \Rightarrow r \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

b) Si $2r - 1 < 0$: $|2r-1| = -(2r-1)$. Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos $r \in \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Los números que satisfacen la condición estarán en alguno de los dos intervalos, luego pertenecerán a su unión. Solución: $r \in \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

3. Resolver la inecuación $1 - \dfrac{x}{2} > \dfrac{1}{1+x}$.

a) $1+x>0 \quad (\Leftrightarrow x>-1)$. Al multiplicar ambos miembros por $(1+x)$, positivo, se mantiene el sentido de la desigualdad. Entonces

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)(1+x)>1 \Rightarrow x^2-x<0 \Rightarrow x(x-1)<0 \Rightarrow \begin{cases} x<0 \text{ y } x-1>0 \\ x>0 \text{ y } x-1<0 \end{cases}$$

La primera opción no tiene solución. La segunda da como resultado $x\in(0,1)$ que cumple la hipótesis hecha, $x>-1$.

b) $1+x<0 \quad (\Leftrightarrow x<-1)$. Al multiplicar ambos miembros, por $(1+x)$, negativo, cambia el sentido de la desigualdad. Entonces

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)(1+x)<1 \Rightarrow x^2-x>0 \Rightarrow x(x-1)>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \text{ y } x-1>0 \\ x<0 \text{ y } x-1<0 \end{cases}$$

De la primera opción resulta $x\in(1,\infty)$ y de la segunda $x\in(-\infty,0)$. Los valores de x que cumplen alguna de las 2 opciones pertenecerán a la unión de los intervalos, luego $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$. Además debe cumplirse la hipótesis $x<-1$. Luego nos queda $x\in(-\infty,-1)$.

En consecuencia, los valores de x que cumplen la inecuación estarán en el intervalo $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

4. Calcular:

$$(3+2\mathrm{i})+(8-5\mathrm{i})=3+8+2i-5i=\ 11-3i$$

$$(1+4i)(5-i)=5-i+20i-4i^2=5+4+19i=9+19i$$

$$(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})=4-9i^2=4+9=13$$

$$\frac{20+30\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=\frac{(20+30i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=$$
$$=\frac{60-20i+90i-30i^2}{9-i^2}=\frac{90+70i}{10}=9+7i$$

$$\mathrm{i}^{6254}=i^{4\cdot 1563+2}=i^2=-1$$

5. Calcula x de modo que $\frac{x+i}{1-i}$ sea: a) real; b) imaginario puro.

Calculamos el cociente

$$\frac{x+i}{1-i}=\frac{(x+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{x-1+xi+i}{2}=\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{2}i$$

a) Para que sea un número real la parte imaginaria a de ser nula. Por tanto

$$\frac{x+1}{2}=0 \Rightarrow x=-1$$

b) Para que sea imaginario puro la parte real ha de ser nula. Por tanto

$$\frac{x-1}{2}=0 \Rightarrow x=1$$

6. Calcula x e y para que $(2+xi)+(y-3i)=7+4i$.

$$(2+xi)+(y-3i)=2+y+(x-3)i$$

El complejo anterior debe ser igual a $7+4i$ por lo que igualando partes reales y partes imaginarias, resulta:

$$2+y=7 \Rightarrow y=5$$
$$x-3=4 \Rightarrow x=7$$

7. Resuelve la siguiente ecuación $x^2-2x+5=0$.

$$x^2-2x+5=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm 4\sqrt{-1}}{2} \Rightarrow x=1\pm 2i$$

8. Halla, para el complejo $4+4\sqrt{3}i$, módulo, conjugado e inverso.

Módulo: $\mathrm{r}=\sqrt{4^2+4^2\cdot 3}=8$

Conjugado: $4-4\sqrt{3}i$

Inverso: $\frac{1}{4+4\sqrt{3}i}=\frac{4-4\sqrt{3}i}{(4+4\sqrt{3}i)(4-4\sqrt{3}i)}=\frac{4-4\sqrt{3}i}{64}=\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{3}}{16}i$

9. Calcula x e y de manera que $(x+i)(1+yi)=(1+3i)$.

Desarrollamos el producto de complejos

$$(x+i)(1+yi)=x-y+xyi+i=x-y+(xy+1)i$$

Igualamos a continuación partes reales e imaginarias entre sí y resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x-y=1 \\ xy+1=3 \end{cases} \Rightarrow x=1+y \Rightarrow y^2+y+1=3 \Rightarrow y=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Para cada uno de los valores de y obtendremos una solución.

Si $y=1 \Rightarrow x=2$.
Si $y=-2 \Rightarrow x=-1$.

10. Resuelve la ecuación $x^4+1=0$.

$$x^4+1=0 \Rightarrow x^4=-1 \Rightarrow x^2=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

Sea $x=a+bi$. Entonces $x^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$.

a) $a^2-b^2+2abi=i \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=1 \end{cases}$

De $a^2-b^2=0$ resulta $a=\pm b$. Si $a=-b$, la segunda condición se convierte en $-2a^2=1$ que no tiene sentido pues a es un número real. La otra opción es $a=b$, de donde $2a^2=1 \Rightarrow a=b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces dos de las cuatro soluciones serán $x=\pm\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$.

b) Queda por resolver $a^2-b^2+2abi=-i$, para lo cual podemos repetir el proceso del apartado a). Pero por el Teorema Fundamental del Álgebra sabemos que existen en total cuatro soluciones. Como las dos ya calculadas son complejas no conjugadas entre sí, las dos restantes serán las conjugadas de las anteriores.

Por tanto las cuatro soluciones son $\pm\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$ y $\pm\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$.

Ejercicios propuestos (las soluciones se encuentran al final)

1. En los siguientes conjuntos, determinar el supremo y el ínfimo, indicando si coinciden con el máximo o mínimo respectivamente.

a) $A = \left\{ \dfrac{n+1}{n+2} \right\}$ siendo $n \in \mathbb{N}$
b) $B = \{x / x^2 - 5x + 6 < 0\}$ siendo $x \in \mathbb{R}$
c) $C = (0, \infty)$

2. Halla los números reales que cumplen las siguientes condiciones:

a) $|2a - 4| = 5$
b) $|a - 1| \cdot |\pi - a| = 0$

3. Resuelve las inecuaciones:

a) $|x + 5| \geq 4$
b) $\left| 3 - \dfrac{1}{x} \right| < 1$

4. Halla el módulo, conjugado e inverso de cada uno de los siguientes complejos.

a) $4 + 3i$
b) $3 + \sqrt{5}i$

5. Calcula las siguientes operaciones con complejos:

a) $(5 + 7i) + (5 - 7i) =$
b) $(1 + 3i) - (1 + i) =$
c) $(2 + 5i) \cdot (3 + 4i) =$
d) $(-2 - 5i) \cdot (-2 + 5i) =$
e) $(1 + \mathrm{i})^2 : (4 + \mathrm{i}) =$
f) $(2 + \mathrm{i}) : (1 - \mathrm{i})^2 =$
g) $(\mathrm{i} - 3\mathrm{i})^3 =$

6. Calcula las siguientes potencias:

a) $i^{65} =$
b) $(-i)^{79} =$
c) $i^{-54} =$
d) $(-i)^{-61}$
e) $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i} =$

7. Dado un número complejo z,

a) ¿cuánto vale $z + \bar{z}$?
b) Si $z - \bar{z}$ es un número real, ¿qué se puede afirmar sobre z?

8. Halla x para que el cociente $(x + 2i):(3 + 2i)$ sea un número imaginario puro.

9. Dados los números complejos $2 - mi$ y $3 - ni$, halla los valores que deben tener *m* y *n* para que el producto de aquellos sea igual a $8 + 4i$.

10. Comprueba que los números complejos $2 + 3i$ y $2 - 3i$ verifican la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$.

11. Halla todas las soluciones reales y complejas de las ecuaciones:

a) $2x^2 = 7$
b) $x^2 + 6x + 25 = 0$
c) $x^2 - 2\sqrt{5} + 6 = 0$

12. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo 5. Halla estos complejos.

13. Halla los números complejos tales que su cuadrado es igual a su conjugado (hay cuatro soluciones).

Soluciones a los ejercicios propuestos

1.
   a) Sup (A)= 1. A no tiene máximo. Inf (B)= 2/3. Coincide con el mínimo.
   b) Sup (B)= 3. B no tiene máximo. Inf (B)= 2. B no tiene mínimo.
   c) Sup (C)= ∞. C no tiene máximo. Inf (C)= 0. C no tiene mínimo.

2. a) Dos soluciones: $a_1 = \frac{9}{2}$; $a_2 = -\frac{1}{2}$
   b) Dos soluciones: $a_1 = 1$; $a_2 = \pi$

3. a) $x \in (-\infty, -9] \cup [-1, \infty)$
   b) $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

4. a) $z = 4 + 3i$; $\quad \bar{z} = 4 - 3i$; $\quad z^{-1} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$
   b) $z = 3 + \sqrt{5}i$; $\quad \bar{z} = 3 - \sqrt{5}i$; $\quad z^{-1} = \frac{3}{14} - \frac{\sqrt{5}}{14}i$

5.

a) 10	e) $\frac{2}{17} + \frac{8}{17}i$
b) $2i$	f) $-\frac{1}{2} + i$
c) $14 + 23i$	g) $8i$
d) 29	

6.

a) i	d) i
b) i	e) -1
c) -1	

7.
   a) $2\,\mathrm{Re}(z)$.
   b) Que es nulo.

8. $x = -\frac{4}{3}$

9. Dos soluciones: $m_1 = \frac{2}{3}$; $n_1 = -3$ y $m_2 = -2$; $n_2 = 1$

11. a) $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

b) $x = -\frac{3}{2} \pm 2i$

c) $x = \pm\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\,i$.

12. Dos soluciones: $2 + 3i,\ 4 - 3i$ y $2 - 3i,\ 4 + 3i$

13. $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$