Apéndice C

Números Reales y Complejos

C.1. Los números reales

Suponemos conocido el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Vamos a definir y estudiar en $\mathbb{R}$ algunos conceptos como relaciones de orden, intervalos, cotas y valor absoluto.

C.1.1. Relaciones de orden.

Sea el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Decimos que entre los elementos de un subconjunto suyo S existe una **relación de orden** si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

a) Reflexiva: $a \le a, \quad \forall a \in S$
b) Antisimétrica: $a \le b,\ b \le a \Rightarrow a = b, \quad \forall a, b \in S$
c) Transitiva: $a \le b,\ b \le c \Rightarrow a \le c, \quad \forall a, b, c \in S$

Conocemos distintos subconjuntos de $\mathbb{R}$, por ejemplo los números naturales, los enteros, los racionales y los reales. En todos ellos está definida la relación de orden.

En $\mathbb{N}$: $\quad 1 < 2 < 3 < \ldots$

En $\mathbb{Z}$: $\quad -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots$

En $\mathbb{Q}$: $\quad \dfrac{i_1}{j_1} \le \dfrac{i_2}{j_2} \Leftrightarrow i_1 j_2 \le i_2 j_1$

Propiedades de la relación de orden en $\mathbb{R}$.

a) Es **compatible con la suma** pues se cumple

$$a \le b \Rightarrow a + c \le b + c, \quad \forall c \in S$$

es decir, si en una desigualdad sumamos el mismo número a los dos miembros, la desigualdad no varía.

b) Es **compatible con el producto** pues se cumple

$$c > 0,\ a \le b \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c$$

es decir, si en una desigualdad multiplicamos por el mismo número positivo a los dos miembros, la desigualdad no varía.

c) Otras propiedades:

$$\begin{aligned} &a \le b, c \le d \Rightarrow a + c \le b + d \\ &a \le 0 \Rightarrow -a \ge 0 \\ &a \le b \Rightarrow -a \ge -b \\ &c < 0, \quad a \le b \Rightarrow a \cdot c \ge b \cdot c \end{aligned}$$

C.1.2. Intervalos.

Los **intervalos** son subconjuntos de la recta real. Los hay de tres tipos:

- Intervalo abierto: $(a,b) = \{r \in \mathbb{R} /\ a < r < b\ \}$

- Intervalo cerrado: $[a,b] = \{r \in \mathbb{R} /\ a \le r \le b\}$

- Intervalo semiabierto (o semicerrado): puede serlo por la derecha

$$[a,b) = \{r \in \mathbb{R} /\ a \le r < b\}$$

o por la izquierda

$$(a,b] = \{r \in \mathbb{R} /\ a < r \le b\}$$

Ejemplo: $(-\infty, 3]$ indica el conjunto de todos los números reales menores o iguales que 3. A su vez, $(\sqrt{2}, \infty)$ es el conjunto de todos los números reales mayores que $\sqrt{2}$.

C.1.3. Cotas. Supremo e ínfimo. Máximo y mínimo.

Decimos que M es **cota superior** del conjunto D si $x \leq M$ para todo x del conjunto. A la menor de las cotas superiores de D se la denomina **supremo**. Si el supremo pertenece al conjunto se le llama **máximo** o **último elemento.**

Análogamente, decimos que m es **cota inferior** del conjunto D si $x \geq m$ para todo x del conjunto. A la mayor de las cotas inferiores de D se la denomina **ínfimo**. Si el ínfimo pertenece al conjunto se le llama **mínimo** o **primer elemento.**

Ejemplo: En el intervalo $(-2,7]$ una cota inferior es -3 y el ínfimo es -2, que no pertenece al intervalo, al ser éste abierto, por lo que no existe mínimo. El 7 es la menor de las cotas superiores, es decir el supremo. Como pertenece al intervalo, es también el máximo.

C.1.4 Valor absoluto y parte entera.

El **valor absoluto** de un número $a \in \mathbb{R}$ es el valor que tiene prescindiendo del signo. Coincide con el número si es positivo y con su opuesto si es negativo. Por tanto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

a) $|a| \geq 0$

b) $|a| = |-a|$

c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

d) $|a+b| \leq |a| + |b|$

La **parte entera** de un número x, es el valor del mayor entero menor o igual a x. Se representa por E(x) o bien por [x]. La parte entera de x cumple:

$$\mathrm{E}(x) = p \in Z \,/\, p \leq x < p+1$$

C.2. Los números complejos

Como hemos hecho en $\mathbb{R}$, suponemos conocido el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos y vamos a estudiar algunos aspectos de estos números, así como las operaciones básicas entre ellos.

C.2.1 Unidad imaginaria. Forma binómica de un número complejo. Representación en el plano.

Para dar solución a la ecuación $x^2+1=0$ se define la **unidad imaginaria** $i=+\sqrt{-1}$. Un número complejo, escrito en **forma binómica,** es una expresión de la forma $a+bi$, donde *a* y *b* son números reales.

El número $a\in\mathbb{R}$ es la parte real del número complejo. A $b\in\mathbb{R}$ le llamamos **parte imaginaria**. Escribimos

$$z=a+bi\in\mathbb{C}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}(z)=a\\ \mathrm{Im}(z)=b\end{cases}$$

Si $a=0$, el número *z* es **imaginario puro**. Si $b=0$, *z* es un número **real**.

Ejemplo: el número complejo $-1+\pi i$ tiene como parte real -1 y como parte imaginaria π. πi es un número imaginario puro.

Para representar los números complejos en unos ejes de coordenadas se representa en el eje de abscisas la parte real y en el de ordenadas la imaginaria. Al punto *A* de coordenadas *(a , b)* se le llama **afijo** del número complejo $a+bi$. Así a cada complejo le hacemos corresponder un punto en el plano y recíprocamente.

C.2.2 Conjugado de un número complejo. Módulo. Argumento.

Sea el número complejo $z=a+bi$, cuyo afijo es el punto *A*, de coordenadas (a,b), del plano. Se llama conjugado de z al número complejo $\bar{z}$ que tiene la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo

$$z=a+bi\Rightarrow\bar{z}=a-bi$$

Se llama **módulo** de *z* al número real

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

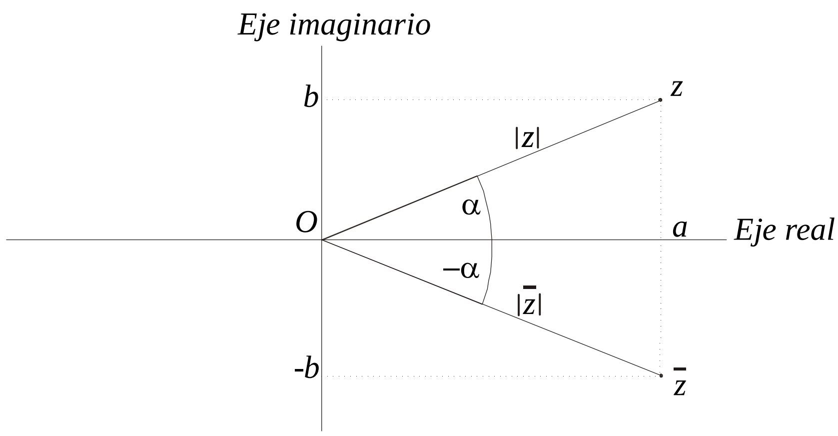
Es fácil ver que el módulo de un complejo coincide con el de su conjugado.

$$\left|\bar{z}\right| = \sqrt{a^2 + \left(-b\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \left|z\right|$$

Se llama **argumento** de z al ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta que une el origen de coordenadas O con el afijo A de z. El argumento de z cumple

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|}; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z|}, \quad -\pi < \alpha \le \pi$$

En la siguiente figura se representan un complejo y su conjugado, así como las partes real e imaginaria de cada uno, sus módulos y su argumentos.



C.2.3 Operaciones con números complejos

a) Suma (diferencia): se suman (restan) partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí

$$(a + bi) \pm (c + di) = a \pm c + (b \pm d)i$$

b) Producto: se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$

$$(a+bi)(c+di) = ac + bd\,i^2 + ad\,i + bc\,i = ac - bd + (ad + bc)i$$

c) División: se obtiene multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

d) Potencia: se calcula desarrollando la potencia del binomio *(a + bi)* y teniendo en cuenta las potencias del número *i*.

$$\begin{aligned}
i^1 &= i \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2\cdot i=(-1)\,i=-i \\
i^4 &= i^3\cdot i=(-i)\,i=-i^2=1
\end{aligned}$$

Observamos que los valores de las potencias de *i* se repiten de cuatro en cuatro. Así, para calcular potencias de *i* dividiremos el exponente entre 4 y calcularemos la potencia del número *i* que tiene por exponente el resto de la división.

Ejemplo: Calcular $\dfrac{(2+i)^3}{1-i}$.

En primer lugar desarrollamos el numerador:

$$(2+i)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3=8+12i+6(-1)-i=2+11i$$

Ahora multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de éste:

$$\frac{(2+i)^3}{1-i}=\frac{2+11i}{1-i}=\frac{(2+11i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+11i^2+(2+11)i}{1-i^2}=\frac{-9+13i}{2}=-\frac{9}{2}+\frac{13}{2}i$$

Para potencias de orden más elevado podemos utilizar los coeficientes del binomio de Newton.

C.2.4 Teorema fundamental del álgebra.

El teorema fundamental del álgebra establece que cualquier polinomio de coeficientes reales y grado *n*, $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^0+a_0$, posee *n* raíces complejas. Se cumple también que si un número complejo es raíz del polinomio, entonces su conjugado también lo es.

Ejemplo: Calcular las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$. ¿Es alguna de ellas real?

Según el teorema, cada raíz compleja va acompañada de su conjugada por lo que el número de raíces complejas de un polinomio es siempre par. El polinomio que estamos considerando es de grado 3, por lo que tiene 3 raíces. Como debe tener un número par de raíces complejas, al menos tendrá una real.

Probando con $x = \pm 1, x = \pm 2$ ..., obtenemos que $x = 2$ es raíz de $P(x)$ y dividiendo resulta

$$\frac{P(x)}{x-2} = x^2 - 2x + 2$$

Hallando ahora las raíces del cociente

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

Entonces las raíces del polinomio son $x_1 = 2,\ x_2 = 1+i,\ x_3 = 1-i$.