Apéndice B

Algunas funciones elementales

B.1. Función potencia *n*-ésima

Una función **potencia *n*-ésima** es una función de la forma

$$f(x) = x^n$$

donde la base x es una variable y el exponente n un número natural. Es la forma más sencilla de las funciones polinómicas

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Las funciones potencia *n*-ésima están definidas para todo número real, por lo que su **dominio** es $\mathbb{R}$. Son continuas en todo su dominio.

El **recorrido** de las funciones potencia *n*-ésima será:
-El intervalo $[0,\infty)$ si n es par.
-Todo $\mathbb{R}$ si n es impar.

En una función polinómica $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ el término de mayor grado es el que determina su **comportamiento en el infinito**. Esto se debe a que, si $n > m$, la función x^n crece más rápido que la función x^m, para $x > 1$. Su comportamiento en el infinito depende de si n es par o impar y del signo de a_n:

$$n \text{ par} \begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

$$n \text{ impar} \begin{cases} \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty & \text{si } a_n > 0 \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Se representan a continuación dos ejemplos de función potencia n-ésima.

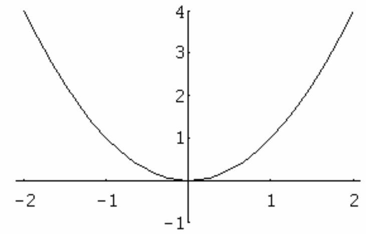

Fig. B.1. Función $y = x^2$

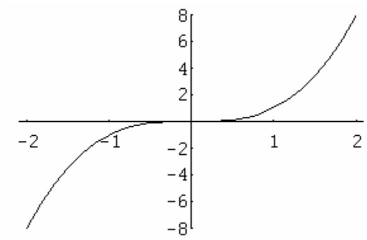

Fig. B.2. Función $y = x^3$

B.1.1 Binomio de Newton

Es la potencia n-ésima de la suma de dos números reales. Su expresión desarrollada es la siguiente:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Los coeficientes $\binom{n}{m}$ se denominan **números combinatorios** y se calculan del siguiente modo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Ejemplo: $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 15$.

Calculando de la misma forma los demás coeficientes, obtenemos:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a b^5 + \binom{6}{6} b^6 =$$

$$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Propiedades de los números combinatorios

I. $\binom{n}{0}=1, \quad \binom{n}{n}=1$

II. $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$

III. $\binom{n}{n-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
. . .

Estas tres propiedades se reflejan en el **triángulo de Tartaglia** o de Pascal, formado por los números combinatorios. Vemos que se cumple:

1. Los extremos de cada fila valen 1 (propiedad I).
2. El triángulo es simétrico (propiedad II).
3. Cada número es suma del que tiene encima y el que está a la izquierda de este (propiedad III).

B.2 Función exponencial. Función logarítmica

Una función **exponencial** es una función de la forma $f(x)=a^x$, donde la base *a* es un número real positivo y el exponente *x* es una variable. En todas las funciones exponenciales se verifica $f(0)=1$, pues $a^0=1$ para cualquier *a*, por lo que todas pasan por el punto (0,1).

El **dominio** de la función exponencial es todo $\mathbb{R}$ y su **recorrido** es el intervalo $(0,\infty)$. Las funciones exponenciales son continuas en todo $\mathbb{R}$.

El **crecimiento y decrecimiento** de las funciones exponenciales depende del valor de *a*:

Si $a>1$ la función exponencial es creciente en todo $\mathbb{R}$.
Si $0<a<1$ la función exponencial es decreciente en todo $\mathbb{R}$.

El **comportamiento en el infinito** también depende del valor de la base:

$$a>1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x=0 \,, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty$$
$$a<1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty \,, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x=0$$

Una función exponencial de especial importancia es $y=e^x$.

Representamos dos ejemplos de función exponencial, de bases mayor y menor que 1 respectivamente.

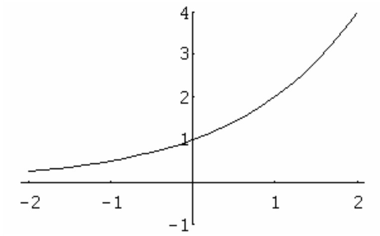

Fig. B.3. Función $y = 2^x$

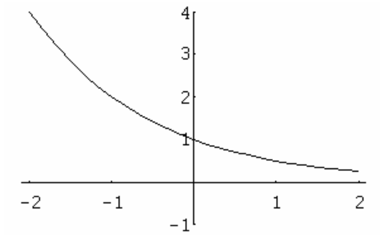

Fig. B.4. Función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tras haber visto las características principales de las funciones potencia *n*-ésima y exponencial, recordamos las **operaciones principales** relativas a este tipo de funciones.

a) El producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

b) El cociente de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

c) El producto de potencias de igual exponente es igual al producto de las bases elevado al exponente.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

d) El cociente de potencias de igual exponente es igual al cociente de las bases elevado al exponente.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

e) La potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de exponentes.

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Las raíces se pueden considerar potencias de exponente fraccionario. Aplicándoles las mismas reglas obtenemos:

a) La raíz del producto de dos números es igual al producto de las raíces de los números.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

b) La raíz del cociente de dos números es igual al cociente de las raíces de los números.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

c) Para calcular la raíz de la raíz de un número se multiplican los índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

El **logaritmo** en base a de un número x es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número; es decir : $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

Una función **logarítmica** es una función de la forma $f(x) = \log_a x$, donde a es un número real positivo y distinto de 1. En toda función logarítmica se verifica $f(1) = 0$, pues al ser $a^0 = 1$ entonces $\log_a 1 = 0$, para cualquier a. Así pues, todas pasan por el punto (1,0).

La expresión $y = \log_a x$ es equivalente a $a^y = x$, por lo que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Por ello sus representaciones gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

El **dominio** de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ es $(0,\infty)$ y su **recorrido** es todo $\mathbb{R}$. Las funciones logarítmicas son continuas en $(0,\infty)$.

El **crecimiento y decrecimiento** de las funciones logarítmicas depende, como en las exponenciales, del valor de a.

Si $a > 1$, $f(x) = \log_a x$ es creciente en $(0,\infty)$. Además la función será positiva para los valores de x mayores que 1, y negativa para los valores de x menores que 1.

Si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x$ es decreciente en $(0,\infty)$. La función será negativa para los valores de x mayores que 1, y positiva para los valores de x menores que 1.

Su **comportamiento en el infinito** también depende de a.

$$a > 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$
$$a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

Representamos a continuación dos ejemplos de función logarítmica, el logaritmo neperiano o natural y el logaritmo en una base menor que 1.

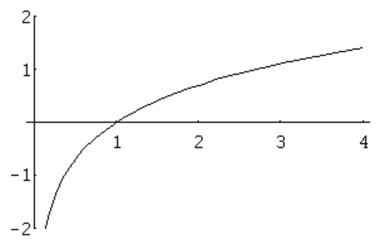

Fig. B.5. Función $y = \ln x$

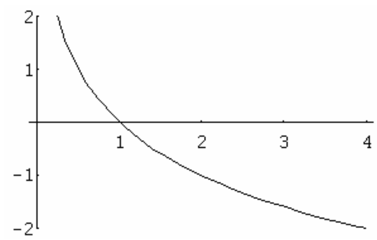

Fig. B.6. Función $y = \log_{1/2} x$

Como hemos hecho en las funciones potencia n-ésima y exponencial, recordamos las **operaciones principales** relativas a los logaritmos.

a) El logaritmo de un producto de dos números es la suma de los logaritmos de los números.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

b) El logaritmo de un cociente de dos números es la diferencia de los logaritmos de los números.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

c) El logaritmo de una potencia de x es el producto del exponente por el logaritmo de x.

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

d) El logaritmo de una raíz de x es el logaritmo de x dividido entre el índice.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{1/n} = \frac{1}{n} \log_a x$$

B.3. Funciones trigonométricas y sus inversas

Las funciones trigonométricas son periódicas de período 2π, lo cual significa que sus valores se repiten cuando la variable se incrementa en 2π, es decir

$$f(x+2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Las funciones trigonométricas básicas son seno, coseno, tangente y sus inversas arco seno, arco coseno y arco tangente.

Función **seno,** $y = \operatorname{sen} x$**.** Características principales:

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es el intervalo $[-1,1]$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es periódica de período 2π.
-No existe el límite de $\operatorname{sen} x$ cuando x tiende a $\pm\infty$.
-Es una función impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.
-Representación:

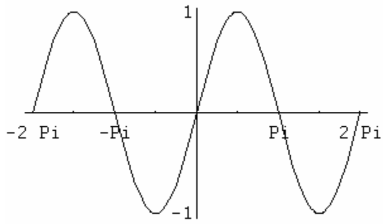

Fig. B.7. Función $y = \operatorname{sen} x$

Función **coseno,** $y = \cos x$**.** Características principales:

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es el intervalo $[-1,1]$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es periódica de período 2π.
-No existe el límite de $\cos x$ cuando x tiende a $\pm\infty$.
-Es una función par: $\cos(-x) = \cos x$.
-Representación:

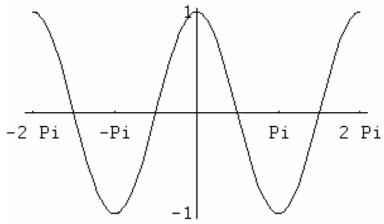

Fig. B.8. Función $y = \cos x$

Función **tangente,** $y = \tan x$. Características principales:

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es $\mathbb{R}$.
-Es continua en todo su dominio, excepto en los puntos $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in Z \right\}$.
-Es periódica de período π.
-Las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.
-Es una función impar: $\tan(-x) = -\tan x$.
-Representación:

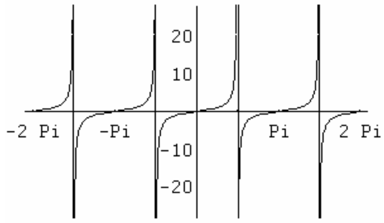

Fig. B.9. Función $y = \tan\ x$

Las funciones seno, coseno, tangente no son inyectivas, es decir tienen la misma imagen para distintos valores de la variable. Para que existan sus funciones inversas, las definimos sólo en ciertos intervalos.

Función **arco seno,** $y = \text{arcsen}\, x$. Características principales:

-Su dominio es el intervalo $[-1,\ 1]$.
-Su recorrido es el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es creciente en todo su dominio.
-Representación:

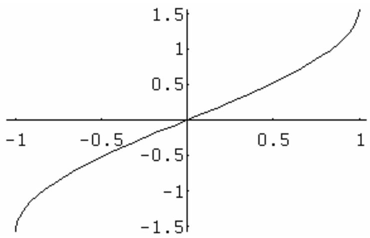

Fig. B.10. Función $y = \text{arcsen}\, x$

Función **arco coseno,** $y = \arccos x$. Características principales:

-Su dominio es el intervalo $[-1,\ 1]$.
-Su recorrido es el intervalo $[0, \pi]$.

-Es continua en todo su dominio.
-Es decreciente en todo su dominio.
-Representación:

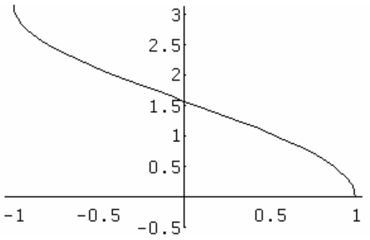

Fig. B.11. Función $y = \arccos x$

Función **arco tangente,** $y = \arctan(x)$. Características principales:

-Su dominio es $\mathbb{R}$.

-Su recorrido es el intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

-Es continua en todo su dominio.

-Es creciente en todo su dominio.

-$\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

-Representación:

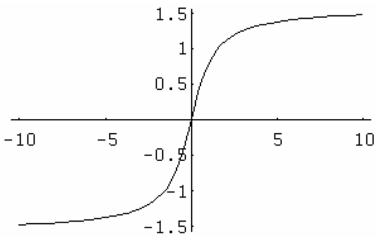

Fig. B.12. Función $y = \arctan x$

Existen diversas **relaciones entre las funciones trigonométricas** seno, coseno y tangente. Entre las más utilizadas se encuentran:

a) $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 b = 1$.

b) $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$.
Caso particular: $\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cdot \cos a$.

c) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.
Caso particular: $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$.

d) $\tan(a \pm b) = \dfrac{\text{sen }(a \pm b)}{\cos\,(a \pm b)} = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$.

Caso particular: $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

e) $\text{sen}^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

g) $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$.

h) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$.

i) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \text{sen } a$.

B.4. Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen a partir de $f(x) = e^x$.

Seno hiperbólico $\text{senh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es $\mathbb{R}$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es simétrica respecto al origen.
-Es creciente en todo su dominio.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{senh } x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{senh } x = -\infty$.
-Es una función impar: $\text{senh}(-x) = -\text{senh}(x)$.
-Representación:

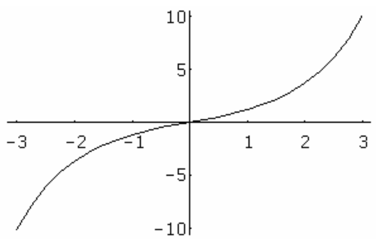

Fig. B.13. Función $y = \text{senh } x$

Coseno hiperbólico $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es el intervalo $[1, \infty)$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es simétrica respecto a OY con un mínimo en el origen.
-$\lim_{x \to +\infty} \cosh x = \lim_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$.
-Es una función par: $\cosh(-x) = \cosh(x)$.
-Representación:

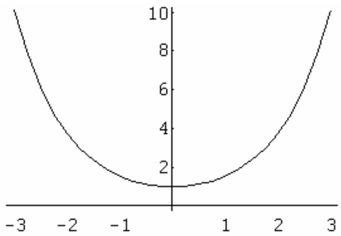

Fig. B.14. Función $y = \cosh x$

Tangente hiperbólica $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

-Su dominio es $\mathbb{R}$.
-Su recorrido es el intervalo $(-1, 1)$.
-Es continua en todo su dominio.
-Es simétrica respecto al origen.
-Es creciente en todo su dominio.
-$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1$.
-Es una función impar: $\tanh(-x) = -\tanh(x)$.
-Representación:

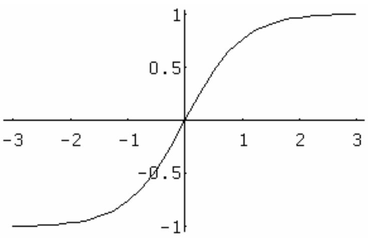

Fig. B.15. Función $y = \tanh x$

Como ocurre en las trigonométricas, existen diversas **relaciones entre las funciones hiperbólicas**. Entre las más utilizadas se encuentran:

a) $\cosh^2 a - \operatorname{senh}^2 a = 1$.

b) $\operatorname{senh}(a \pm b) = \operatorname{senh} a \cosh b \pm \cosh a \operatorname{senh} b.$

Caso particular: $\operatorname{senh} 2a = 2\operatorname{senh} a \cdot \cosh a.$

c) $\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b.$

Caso particular: $\cosh 2a = \cosh^2 a + \operatorname{senh}^2 a.$

d) $\tanh(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{senh}(a \pm b)}{\cosh(a \pm b)} = \dfrac{\tanh a \pm \tanh b}{1 \pm \tanh a \tanh b}.$

Caso particular: $\tanh 2a = \dfrac{2 \tanh a}{1 + \tanh^2 a}.$