TEMA 9.- TRANSFORMACIONES EN EL PLANO.

Definición 9.1.- *Llamaremos transformación geométrica en el plano a una operación u operaciones geométricas que permiten deducir una nueva figura de la primitivamente dada. El transformado del original se llama* ***Homologo***

9.A MOVIMIENTOS EN EL PLANO: DIRECTOS E INDIRECTOS

Dada una figura en el plano, si a cada punto de dicha figura se le hace corresponder otro punto del plano, mediante una ley determinada, se dice que se ha efectuado una transformación.

Tenemos una primera clasificación inicial de las transformaciones.

- **Directa**, cuando conservan el sentido en el plano orientado.
- **Inversa**, cuando los sentidos del original y homólogo son contrarios

Tenemos otra clasificación en función del aspecto de la figura homóloga con respecto a la original

- **Isométricas**, cuando conservan las dimensiones y ángulos; ***se denominan también movimientos***, y veremos la traslación, el giro y las simetrías axial y central
- **Isomórficas**, cuando conservan la forma de la figura original (los ángulos). Existe proporcionalidad entre las dimensiones de la figura original y la homologa; veremos las homotecias.
- **Anamórficas**, cuando cambia la forma de la figura original

Los elementos característicos son los que definen las correspondencias entre las figuras original y homóloga en una transformación

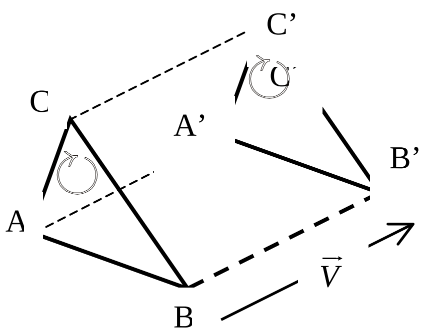
Denominaremos <u>*elementos dobles*</u> a los homólogos de si mismo

Llamaremos producto de transformaciones a la que se obtiene por la aplicación sucesiva de dos o mas transformaciones parciales en un determinado orden

9.B.- TRASLACIONES: DEFINICIÓN, COMPOSICIÓN DE TRASLACIONES

Sea $\vec{V}$ un vector libre.

Definición 9.2.- *Se llama traslación T, según el vector* $\vec{v}$*, a una transformación que asociada a cada punto P otro punto* $P' = T(P)$*, tal que* $\overrightarrow{PP'}$ *, es un representante del vector libre dado,* $\vec{V}$. La representamos por $T(\vec{V})$ y al vector libre $\vec{V}$ se le denomina vector traslación o vector guía, que es su elemento característico que nos define una dirección, un módulo y un sentido



Es una transformación directa pero no involutiva (aplicándola dos veces no da como resultado la misma figura). Si existe por el contrario la traslación reciproca definida por el vector opuesto $\left(\overrightarrow{-V}\right)$

En una traslación no hay puntos dobles, pues todos los puntos se desplazan.

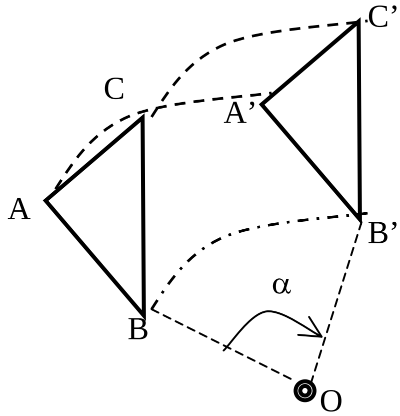
Toda recta paralela al vector traslación es doble, pues cada punto, P, de la recta se transforma en otro punto , P', de la recta y, a su vez, es el resultado de trasladar algún punto. Q, de la recta.

Proposición 9.1.- La composición de dos traslaciones de vectores $\vec{V}$ y $\vec{V'}$ es una traslación definida por un vector $\vec{V} = \vec{V} + \vec{V'}$, suma geométrica de los vectores que definen las traslaciones dadas

5.5.C.- GIROS: DEFINICIÓN, TIPOS Y COMPOSICIÓN DE GIROS.

Definición 9.3.- *Dado un punto O, fijo en el plano, y un ángulo orientado α,* (se considera positivo el sentido contrario a las agujas del reloj) *si a un punto cualquiera P, se le hace corresponder otro punto P', tal que: OP = OP' ;* $\widehat{POP'} = \alpha$ *Los puntos P y P' son homólogos en una transformación llamada giro.*

El punto O se denomina centro de giro; el ángulo α, ángulo de giro, que son los elementos característicos, Este giro se representa abreviadamente por $G(O,\alpha)$



Es una transformación directa (como puede verse en el ejemplo)

Los elementos dobles son: el centro de giro y las circunferencias cuyo centro es el centro de giro (en este caso es doble la circunferencia, aun que no los puntos de que está compuesta)

Proposición 9.2.- La composición de dos giros del mismo centro O y de ángulos α y β respectivamente, es otro giro del mismo centro O y de ángulo (α+β). Es decir:

$$G_2(O,\beta) \circ G_1(O,\alpha) = G(O,\alpha+\beta)$$

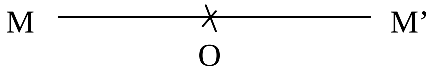
Proposición 9.3.- La composición de dos giros de centros diferentes O_1, O_2 y de ángulos α y β respectivamente, es otro giro de centro O y de ángulo (α+β). Es decir:

$$G_2(O_2,\beta) \circ G_1(O_1,\alpha) = G(O,\alpha+\beta)$$

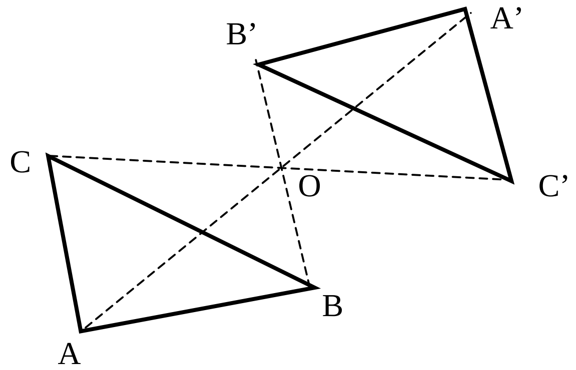
Si el ángulo $\alpha + \beta = 2k\pi$, el producto de dos giros es una traslación

9.D.- SIMETRÍAS: DEFINICIÓN, INVARIANZA Y COMPOSICIÓN DE SIMETRÍAS.

Definición 9.4.- Simetría central. *Dos puntos M y M' son simétricos respecto de un punto O, alineado con ellos, cuando O es el punto medio del segmento que los une*



Puesto que OM = OM' y el ángulo MOM' es de 180º, se puede considerar una simetría axial como un caso particular de giro. Es un giro de centro O y de amplitud 180º



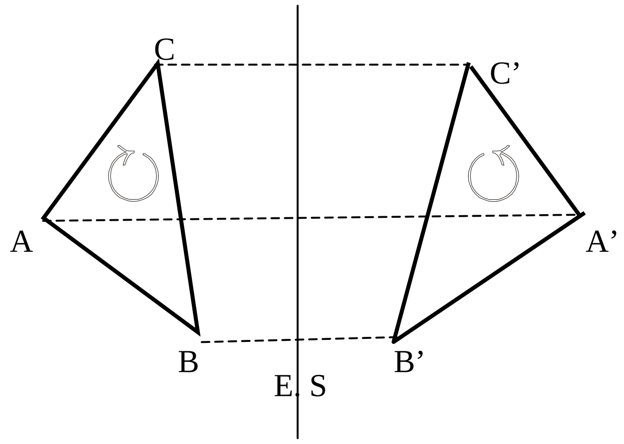
Como podemos ver en la figura, para poder obtener el homólogo de un punto en Simetría Central, trazaremos el segmento que une dicho punto con el Centro de Simetría (O) y a continuación lo prolongaremos una longitud igual a la existente entre dicho punto y O

El elemento característico de esta transformación es el Centro de Simetría (O)

Tiene como propiedades el ser involutiva (la aplicación sucesiva de dos simetrías con el mismo centro de simetría obtiene el elemento original): Es directo (conserva la ordenación en el plano)

Los elementos dobles son: el propio centro de simetría, las rectas que pasan por él, y las circunferencias que tienen como centro el Centro de Simetría (en este caso es doble la circunferencia, pero no los puntos de la misma)

Definición 9.5.- Simetría Axial: *Dada una recta E.S, se llama* ***simetría de eje E.S*** *a una transformación que hace corresponder a cada punto P del plano otro punto* $P' = S(P)$ *tal que la recta E.S, es la mediatriz del segmento* $\overline{PP'}$ *que los une.*



El elemento característico de esta transformación es el **eje de simetría (ES)**

Tiene como propiedad el ser involutivo, y es inverso (no conserva la relación de ordenación el plano)

Los elementos dobles son: el propio eje de simetría, las rectas perpendiculares al eje de simetría, y las circunferencias cuyo centro está situado sobre el eje de simetría (en estos dos últimos casos es doble la entidad, pero no los puntos de que está compuesta).

Proposición 9.4 .- El producto de dos simetrías respecto de dos centros O_1 y O_2 es una traslación $T(2\overrightarrow{O_2O_1})$, definida por el vector $2\overrightarrow{O_2O_1}$

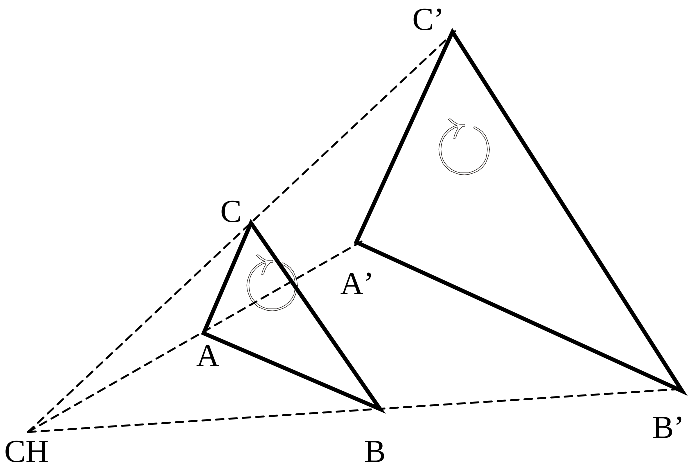
Proposición 9.5 .- El producto de dos simetrías respecto de dos ejes paralelos es una traslación definida por un vector doble de la distancia entre las dos rectas.

Proposición 9.6 .- El producto de dos simetrías respecto de ejes concurrentes es un giro, con centro en el punto de intersección de los ejes y de amplitud doble del ángulo que forman los ejes.

5.5.E.- HOMOTECIAS:

Definición 9.7.- *Dado un punto fijo CH, centro, y un valor k $\neq$ 0, razón, se define la homotecia como la transformación que hace corresponder a un punto M del plano otro punto M' tal que los punto M, M' y CH están alineados, siendo además* $\dfrac{\overline{(CH)M'}}{\overline{(CH)M}} = k$

Para aquellos valores de k>0, los elementos homotéticos estarán a un mismo lado del centro de homotecia, mientras que para valores inferiores a 0 estarán a distinto lado. Si k>1 la figura homóloga será mayor, mientras que si es inferior a 1 será de menor tamaño



Los elementos característicos de la homotecia son; el centro de homotecia (CH) y la razón de la homotecia k.

Es una transformación Isomórfica (conserva los ángulos y las distancias son proporcionales a k). Es una transformación directa

Los elementos dobles son: el Centro de Homotecia y las rectas que pasan por él, teniendo en cuenta en este último caso que son dobles los puntos de dichas rectas

Proposición 9.7 .- El producto de dos homotecias, una de centro CH_1 y de razón k_1 y otra de centro CH_2 y de razón k_2 es otra homotecia de centro CH alineado con los otros dos y de razón k = (k_1 . k_2)

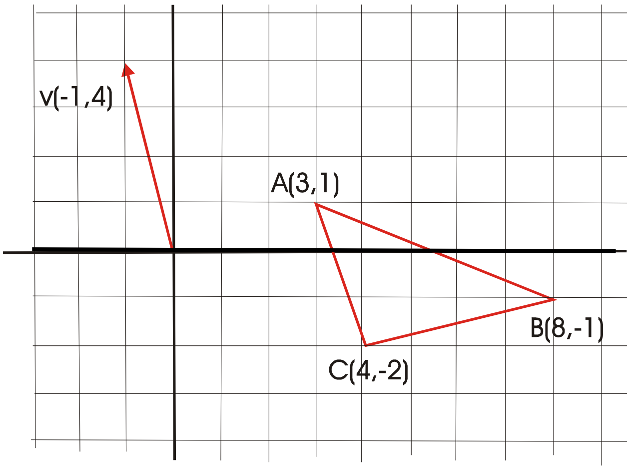
EJERCICIOS RESUELTOS

1º.- Sea T la traslación de vector $\vec{v}(4,2)$, G el giro de centro =(0,0) y ángulo $\alpha = 90º$ y F el triángulo de vértices A(0,2), B(4,1) y C(2,-5).

a) Hallar el transformado de F mediante la transformación $G \circ T$
b) Hallar el transformado de F mediante la transformación $T \circ G$
c) Comprobar que los resultados son distintos, pero, en ambos casos, se obtiene un triángulo igual a F

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º.- a) Traslada el triángulo de la figura de vértices A(3, 1), B(8, -1) y C(4, -2) según el vector $\vec{v}(-1,4)$.
Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.
b) Comprueba que la recta $r: y = 3-4x$ se transforma en si misma (es doble).
Para ello, toma varios puntos de la recta r $\left[(0,3),(1-1),(-2,11)\right]$ y comprueba que sus transformados también están en r



2º.- Dibuja unos ejes de coordenadas sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia C de centro O (3, 4) y de radio 5.

a) Comprueba que C pasa por P(0,0), Q(6,8) y R(3, -1).
b) Traslada los puntos O, P, Q y R mediante la traslación T de vector $\vec{v}(6,-2)$
c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es $O' = T(O)$ y de radio 5 pasa por P', Q' y R'.
d) Trasladando algunos de sus puntos, averigua en que rectas se transforman el eje X y el eje Y