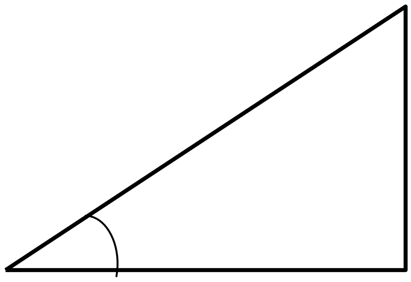
TEMA 8.- TRIGONOMETRÍA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

La trigonometría es la parte de las matemáticas que estudia las relaciones métricas entre los elementos de un triangulo.

A) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO CUALQUIERA

Dado un ángulo agudo α cualquiera, se puede construir sobre él un triángulo rectángulo ABC, como se indica en la figura



A partir de la figura anterior, se establecen las siguientes definiciones:

Definición 5.4.1 .- *El cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud de la hipotenusa se denomina **seno** del ángulo α (sen α)*

$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Definición 5.4.2 .- *El cociente entre la longitud del cateto contiguo al ángulo α y la longitud de la hipotenusa se denomina **coseno** del ángulo α (cos α)*

$$\text{cos de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Definición 5.4.3 .- *El cociente entre las longitudes del cateto opuesto y del cateto contiguo al ángulo α recibe el nombre de **tangente** del ángulo α (tg α)*

$$\text{tangente de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo } \alpha} = \frac{c}{b}$$

Definición 5.4.4 .- *La razón inversa del seno de α se llama **cosecante** de α (cosec α); la inversa de coseno de α, **secante** de α (sec α), y la inversa de la tangente de α ,**cotangente** de α (cotg α)*

B) RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES:

Dado un ángulo α cualquiera siempre se cumple que:

- $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Teorema de Pitágoras)
- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} \Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $\cot g\ \alpha = \dfrac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha} \Rightarrow 1 + \cot g^2\alpha = \cos ec^2\alpha$

C) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS "SINGULARES":

Razones	α=30º = $\frac{\pi}{6}$ rad	α=45º = $\frac{\pi}{4}$ rad	α=60º = $\frac{\pi}{3}$ rad
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

cotg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
sec α	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cosec α	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D) RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS:

d.1.- Se conoce la hipotenusa y un cateto

Datos; a, b Incógnitas: c, B, C.

Cálculo de c: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Cálculo de B: $sen\ B=\frac{b}{a}$

Cálculo de C: $\cos\ C=\frac{b}{a}$, o también: $C=90º-B$

d.2.- Se conocen los dos catetos

Datos: b, c Incógnitas: a, B, C

Cálculo de a: $a=\sqrt{b^2+c^2}$

Cálculo de B: $tg\ B=\frac{b}{c}$

Cálculo de C: $tg\ C=\frac{c}{b}$; o también: $C=90º-B$

d.3.- Se conoce la hipotenusa y un ángulo agudo

Datos: a, B Incógnitas: b, c, C

Cálculo de b: $sen\ B=\frac{b}{a}\Rightarrow b=a.sen\ B$

Cálculo de c: $\cos\ B=\frac{c}{a}\Rightarrow c=a.\cos\ B$

Cálculo de C: $C=90º-B$

d.4.- Se conoce un cateto y un ángulo agudo

Datos: b, B Incógnitas: a, c, C

Cálculo de a: $sen\ B=\frac{b}{a}\Rightarrow a=\frac{b}{sen\ B}$

Cálculo de c: $tg\ B=\frac{b}{c}\Rightarrow c=\frac{b}{tg\ B}=b.\text{cotg}\ B$ o $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Cálculo de C: $C=90º-B$

Ejemplo: Dado un triángulo rectángulo en el que $\widehat{B}=\frac{\pi}{6}$ y la hipotenusa a = 10 cm, calcular los otros elementos del triángulo.

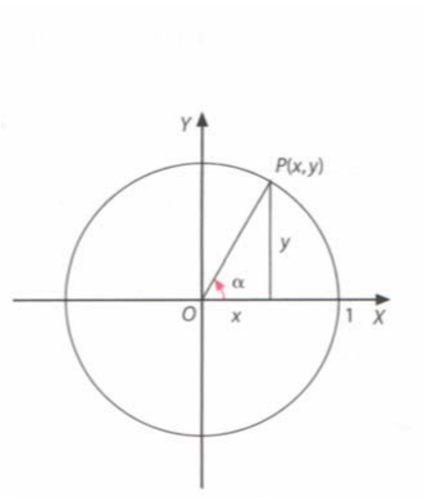
Solución: Estaríamos en el caso d.3

$$\widehat{C}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

$$b=a\ sen\ \widehat{B}\Rightarrow b=10.sen\frac{\pi}{6}=10.\frac{1}{2}=5\ \text{cm}$$

$$c=a.\cos\widehat{B}\Rightarrow c=10.\cos\frac{\pi}{6}=10.\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\cong 8,66$$

E) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA: CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA, ÁNGULOS NEGATIVOS



Para simplificar los cálculos, se toma una circunferencia de radio unidad que se denomina *circunferencia goniométrica.*

Al punto P le asignamos un ángulo :

$$P \rightarrow \text{angulo } \alpha$$

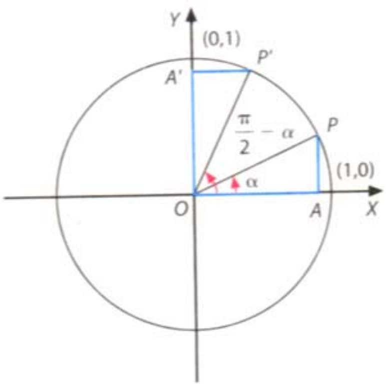
$$(\mathrm{x,y}) \rightarrow (\cos\alpha, \mathrm{sen}\alpha)$$

Esta forma de asignación es totalmente concordante con las definiciones dadas para las razones de un ángulo agudo. En efecto, dado que el radio es, r, es 1, resulta:

$$sen\ \alpha = \frac{y}{r} = y$$

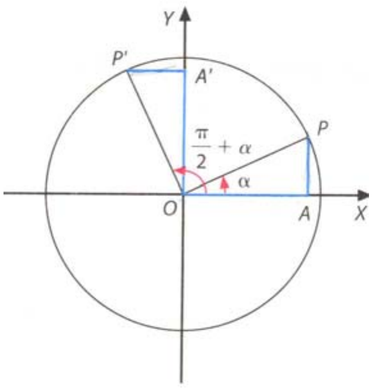
$$\cos\ \alpha = \frac{x}{r} = x$$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios: Dos ángulos son complementarios cuando suman 90º o $\frac{\pi}{2}$ rad .En este caso se cumplen las siguientes relaciones



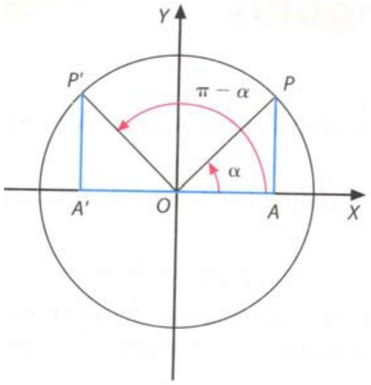
$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\ \alpha$	$\cos ec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sec\ \alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sen\ \alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos ec\ \alpha$
$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot g\ \alpha$	$cotg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \mathrm{t}g\ \alpha$

Razones trigonométricas de ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$:



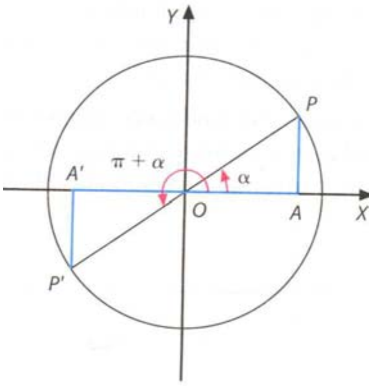
$\mathrm{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\ \alpha$	$\mathrm{cosec}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \sec\ \alpha$
$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{s}en\ \alpha$	$\sec\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -cosec\ \alpha$
$tg\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -co\mathrm{t}g\ \alpha$	$cotg\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{t}g\ \alpha$

Razones trigonométricas de ángulos suplementarios: Dos ángulos son complementarios cuando suman 180º o π rad .En este caso se cumplen las siguientes relaciones



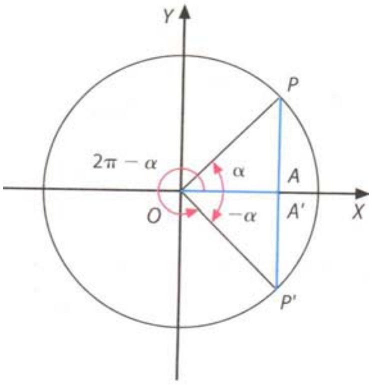
$sen(\pi-\alpha)=sen\ \alpha$	$\mathrm{cosec}(\pi-\alpha)=\mathrm{cosec}\ \alpha$
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\ \alpha$	$\sec(\pi-\alpha)=-\sec\ \alpha$
$tg(\pi-\alpha)=-tg\ \alpha$	$cotg(\pi-\alpha)=-cotg\ \alpha$

Razones trigonométricas de ángulos que difieren en 180º o π rad :



$sen(\pi+\alpha)=-sen\ \alpha$	$\cos ec(\pi+\alpha)=-\cos ec\ \alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\ \alpha$	$\sec(\pi+\alpha)=-\sec\ \alpha$
$tg(\pi+\alpha)=tg\ \alpha$	$\cot g(\pi+\alpha)=\cot g\ \alpha$

Razones trigonométricas de ángulos que suman un ángulo completo (360º) o que son ángulos opuestos:

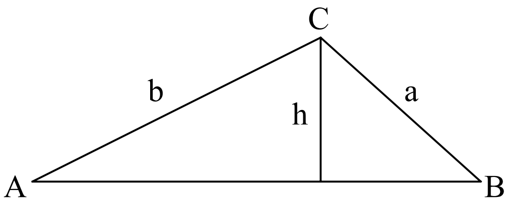


$sen(2\pi-\alpha)=sen\ (-\alpha)=$ $=-sen\ \alpha$	$\cos ec(2\pi-\alpha)=\cos ec(-\alpha)=$ $=-\cos ec\ \alpha$
$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\ (-\alpha)=$ $=\cos\ \alpha$	$\sec(2\pi-\alpha)=\sec(-\alpha)=$ $=\sec\ \alpha$
$tg(2\pi-\alpha)=tg\ (-\alpha)=$ $=-tg\ \alpha$	$\cot g(2\pi-\alpha)=\cot g(-\alpha)=$ $=-\cot g\ \alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\widehat{A}$ **F) RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA (OBLICUÁNGULOS)**

Teorema del seno.- *En un triangulo cualquiera ABC, siempre se cumple que las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:*

$$\boxed{\frac{\text{sen A}}{\text{a}} = \frac{\text{sen B}}{\text{b}} = \frac{\text{sen C}}{\text{c}}}$$



En efecto, si trazamos la altura correspondiente al lado c y tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} h = a.sen\ B \\ h = b.sen\ A \end{array}\right\} \Rightarrow a.sen\ B = b.sen\ A$$

Dividiendo por (a.b), nos queda que:

$$\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ B}{b}$$

Haciendo lo mismo con las otras alturas se tiene el teorema

Ejemplo: Los lados c y b de un triángulo valen 5 cm y 7 cm, respectivamente, y su ángulo B, 30º. Calcular el ángulo C.

<u>Solución:</u> No se puede presuponer que el triángulo sea rectángulo. Para resolver el problema, se aplica el teorema del seno:

$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} \Rightarrow \frac{7}{sen(30^o)} = \frac{5}{sen\ C}$$

De donde resulta que sen C =0,36 y, por lo tanto, C = 21,1º

Podría ser C = 158,9º, pero entonces B + C = 30º + 158,9º $>$ 180º, lo cual no es posible

Teorema del coseno.- *En un triangulo cualquiera ABC, siempre se cumple que: el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de un lado por el otro por el coseno del ángulo que forman*:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\widehat{A}}$$

<u>Demostración:</u>

Si llamamos x e y a los segmentos en los que h divide al lado c, se tiene que $senA = \frac{h}{b}$ y $\cos A = \frac{x}{b}$. Por otro lado, y aplicando Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + y^2 = b^2 sen^2 A + (c - x)^2 = b^2 - b^2\cos^2 A + c^2 - 2.c.x + x^2 ,$$

de donde se deduce el enunciado.

Ejemplo: Los lados un triángulo miden 3 cm y 5 cm, respectivamente, y forman un ángulo de 40º. Calcular el otro lado.

<u>Solución:</u> Aplicando el teorema del coseno, se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\ A \Rightarrow a^2 = 9 + 25 - 30\cos\ 40^o \Rightarrow a \cong 3,3\ \text{cm}$$

En la resolución de triángulos oblicuángulos se distinguen cuatro casos:

f.1.- Se conocen un lado y dos ángulos

Datos: a, A y B Incógnitas: b, c y C

Cálculo de C: $C = 180 - (A + B)$

Cálculo de b: Por el teorema de los senos; $\frac{sen\ A}{a}=\frac{sen\ B}{b}\Rightarrow b=\frac{a.sen\ B}{sen\ A}$

Cálculo de c: Por el teorema de los senos; $\frac{sen\ A}{a}=\frac{sen\ C}{c}\Rightarrow c=\frac{a.sen\ C}{sen\ A}$

f.2.- Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Datos: a, b, B Incógnitas: c, A, C

Cálculo de A: Por el teorema de los senos; $\frac{sen\ A}{a}=\frac{sen\ B}{b}\Rightarrow sen\ A=\frac{a.sen\ B}{b}$

Cálculo de C: $C=180-(A+B)$

Cálculo de c: Por el teorema de los senos; $\frac{sen\ B}{b}=\frac{sen\ C}{c}\Rightarrow c=\frac{b.sen\ C}{sen\ B}$

f.3 .- Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

Datos: a, b y C Incógnitas: c, A y B

Cálculo de c: Por el teorema del coseno; $c^2=a^2+b^2-2.ac\ \cos\ C$

Cálculo de A: Por el teorema de los senos; $\frac{sen\ A}{a}=\frac{sen\ C}{c}\Rightarrow sen\ A=\frac{a.sen\ C}{c}$

Cálculo de B: Por el teorema de los senos; $\frac{sen\ B}{b}=\frac{sen\ C}{c}\Rightarrow sen\ B=\frac{b.sen\ C}{c}$

f.4 .- Se conocen los tres lados:

Datos: a, b y c Incógnitas: A, B y C

Cálculo de A: Por el teorema del coseno;

$$a^2=b^2+c^2-2.bc\ \cos\ A\Rightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2.bc}$$

Cálculo de B: Por el teorema del coseno;

$$b^2=a^2+c^2-2.ac\ \cos\ B\Rightarrow \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2.ac}$$

Cálculo de C: Por el teorema del coseno;

$$c^2=a^2+b^2-2.ab\ \cos\ C\Rightarrow \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2.ab}$$

Ejemplo.- En un triángulo se sabe la medida de los tres lados, que miden a = 5 cm , b = 4 cm y c = 7 cm respectivamente. Calcular el valor de los tres ángulos.
Solución: Como no nos dicen nada, tenemos que suponer que es un triángulo no rectángulo, por lo tanto estaríamos en el caso f.4). Aplicando las fórmulas correspondientes tenemos:

$$a^2=b^2+c^2-2.bc\ \cos\ A\Rightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2.bc}\ \Rightarrow \cos\widehat{A}=\frac{4^2+7^2-5^2}{2.4.7}=\frac{40}{56}=\frac{5}{7}\rightarrow\widehat{A}=44,42^{\circ}$$

$$b^2=a^2+c^2-2.ac\ \cos\ B\Rightarrow \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2.ac}\ \Rightarrow \cos\widehat{B}=\frac{5^2+7^2-4^4}{2.5.7}=\frac{58}{70}=\frac{29}{35}\rightarrow\widehat{B}=34,04^{\circ}$$

$$c^2=a^2+b^2-2.ab\ \cos\ C\Rightarrow \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2.ab}\ \Rightarrow \cos\widehat{C}=\frac{5^2+4^2-7^2}{2.5.4}=\frac{-8}{40}=\rightarrow\widehat{C}=101,53^{\circ}$$

G) OTRAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$sen(A\pm B)=senA.\ \cos B\ \pm\ \cos A.\ senB$$

$$\cos(A\pm B)=\cos A.\ \cos B\mp senA.\ senB$$

$$tg(A\pm B)=\frac{tgA\ \pm\ tgB}{1\ \mp\ tgA.\ tgB}$$

De estas relaciones se deducen las del ángulo doble y las del ángulo mitad. Así:

$$sen(2A)=2senA.\ \cos A$$

$$\cos(2A)=\cos^2 A-sen^2 A$$

$$tg(2A) = \frac{2tgA}{1 - tg^2 A}$$

$$\left.\begin{array}{r} sen^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{A}{2} = 1 \\ \cos^2\dfrac{A}{2} - sen^2\dfrac{A}{2} = \cos(2\dfrac{A}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}} \\ \cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}} \end{array}\right.$$

Ejemplo: Sabiendo que el cos 80º = 0,1736 , calcular el seno, el coseno y la tangente de un ángulo de 40º.
Solución: Como el ángulo de 40º es la mitad de el de 80º, aplicando las fórmulas anteriores tenemos que:

$$sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos(A)}{2}} \Rightarrow sen(40^o) = \sqrt{\frac{1-\cos(80^o)}{2}} = \sqrt{\frac{1-0,1736}{2}} = 0,6428$$

$$cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos(A)}{2}} \Rightarrow \cos(40^o) = \sqrt{\frac{1+\cos(80^o)}{2}} = \sqrt{\frac{1+0,1736}{2}} = 0,7660$$

$$tg(40^o) = \frac{sen(40^o)}{\cos(40^o)} = \frac{0,6428}{0,766} = 0,8392$$