

Tema 6: Semejanza en el Plano.

6.1 Semejanza de Polígonos.

Definición 6.2.1.- Cuatro segmentos **a**, **b**, **c** y **d** son proporcionales si se cumple la siguiente

igualdad: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. A ese cociente común se le llama razón de proporcionalidad.

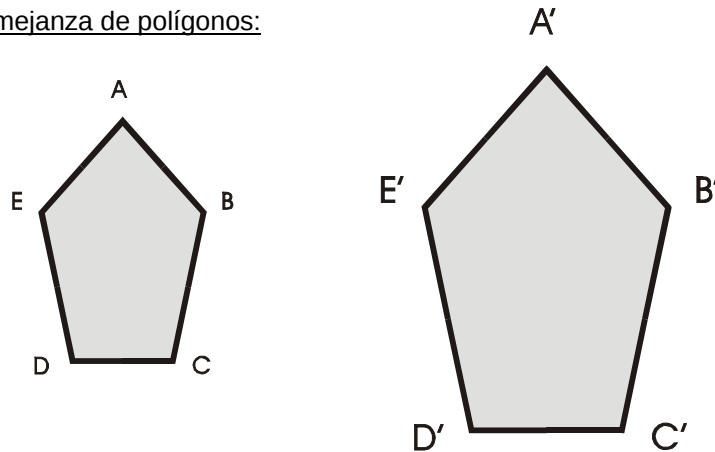
Ejemplo: Tres segmentos de medidas $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 10$ cm y d , de tamaño desconocido, son proporcionales. Halla la razón de proporcionalidad y el valor del segmento desconocido. Repite el cálculo con las medidas: 5, 4 y 3.

Solución: Por ser proporcionales debe de cumplirse que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{10}{d} \Rightarrow d = \frac{10 \cdot 7}{5} = 14 \text{ cm}$$

Semejanza de polígonos:

A)



Definición 6.2.2.- Dos polígonos son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados correspondientes proporcionales; es decir, si los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son semejantes, se escribe $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$, y se verifica que:

- 1.) $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}, \hat{D} = \hat{D'}, \hat{E} = \hat{E'}$
- 2.) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = r$ razón de semejanza

Consecuencias:

- a) Si dos figuras son semejante y conocemos el valor de la razón de semejanza, podemos calcular las medidas de una a partir de las de la otra
- b) Si r es la razón de semejanza, entonces r^2 es la razón entre sus áreas, y r^3 , la razón entre sus volúmenes

6.2 Criterios de Semejanza de triángulos.

Definición 2.3.- Dos triángulos, ABC y $A'B'C'$, son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales; es decir, si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, se escribe $ABC \sim A'B'C'$, y se verifica:

- a) $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}$
- b) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = r$ razón de semejanza

Criterios de semejanza:

PRIMER CRITERIO: Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.

Es decir, el triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$ si:

$$\hat{A} = \hat{A'} \text{ y } \hat{B} = \hat{B'}$$

SEGUNDO CRITERIO: Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.

Es decir, el triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$ si: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

TERCER CRITERIO: Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

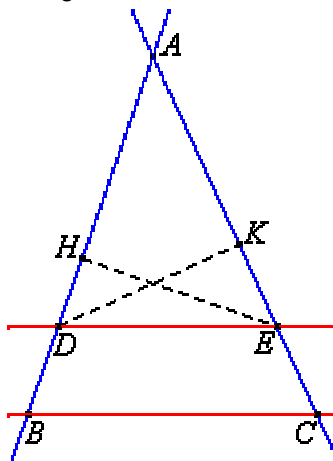
Es decir, el triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$ si:

$$\hat{A} = \hat{A'} \text{ y } \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

6.3 Teorema de Tales.

Teorema de Tales: Cuando dos rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, determinan en éstas segmentos proporcionales

En la figura siguiente las paralelas BC y DE cortan a las secantes AB y AC . Además se han trazado las alturas DK y EH del triángulo ADE . Representamos con $\text{área}(XYZ)$ el área del triángulo XYZ , entonces tenemos que:



$\text{área}(BDE) = \text{área}(CED)$ pues ambos triángulos tienen la misma base DE y la misma altura (distancia entre paralelas).

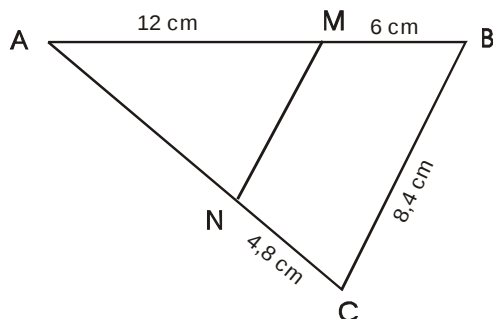
$$\text{área}(ADE) = (1/2) AD HE = (1/2) AE DK$$

$$\text{área}(BDE) = (1/2) BD HE; \quad \text{área}(CED) = (1/2) CE DK$$

$$\text{área}(ADE) : \text{área}(BDE) = \text{área}(ADE) : \text{área}(CED)$$

$$AD : BD = AE : CE$$

Ejemplo: En la figura adjunta, MN es paralela a BC . Calcula: $\overline{AN}$ y $\overline{MN}$



Solución: Aplicando el teorema de Tales, tenemos que:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} \rightarrow \overline{AN} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{NC}}{\overline{MB}} = \frac{12 \times 4,8}{6} = 9,6 \text{ cm}$$

Los triángulos, AMN y ABC son semejantes. Por lo tanto,

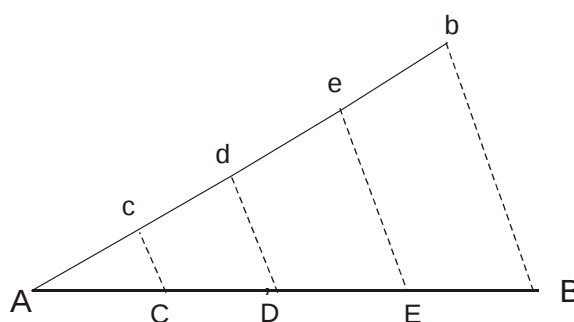
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{8,4 \times 12}{18} = 5,6 \text{ cm}$$

Consecuencias del teorema de Tales

- a) Toda paralela a un lado de un triángulo que corta a los otros dos, determina sobre éstos segmentos proporcionales.

- b) Si en un triángulo trazamos una paralela a uno de los lados, se obtienen dos triángulos semejantes.

División de un segmento en un número de partes iguales : Para dividir el segmento AB en n

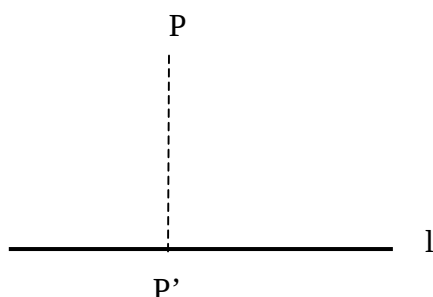


partes iguales(en este caso $n = 4$), se traza una recta que corte al segmento AB en uno de sus extremos, por ejemplo en A, luego sobre dicha semirrecta se toman cuatro segmentos que midan lo mismo, $\overline{Ac} = \overline{cd} = \overline{de} = \overline{eb}$.

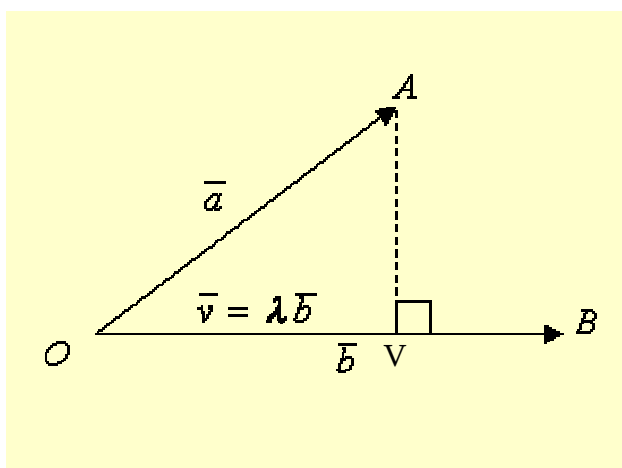
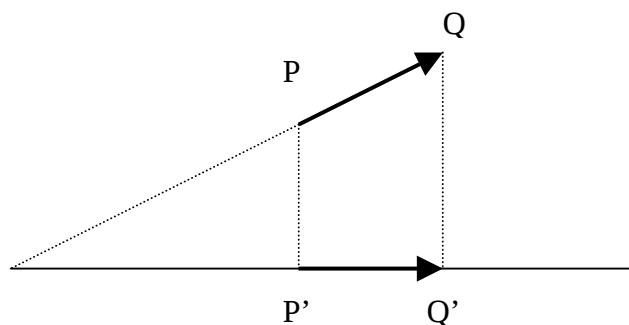
Se une b con B y luego se trazan paralelas a Bb por e, d y c que cortan al segmento AB en C, D y E. Como consecuencia del teorema de Tales, los segmentos AC, CD, DE y EB son todos iguales

6.4 Relaciones métricas en un triángulo rectángulo

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta: Si P es un punto y l es una recta, entonces la proyección del punto P sobre la recta l es el punto P' en la base de la perpendicular trazada de P a l .



Proyección ortogonal de un vector sobre una recta: Para proyectar un vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre una recta l se proyectan los puntos inicial P y final Q del vector, el vector $\overrightarrow{P'Q'}$ es la proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre la recta l .



La proyección de un vector sobre otro tiene múltiples aplicaciones en matemáticas y física.

Si seleccionamos un punto O como origen y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores localizados no nulos de A y B respectivamente, la proyección (vectorial) de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es el vector $\vec{v} = \lambda \vec{b}$ donde V es la proyección del punto A sobre la línea

recta determinada por el origen O y el punto B , (λ es un número real).

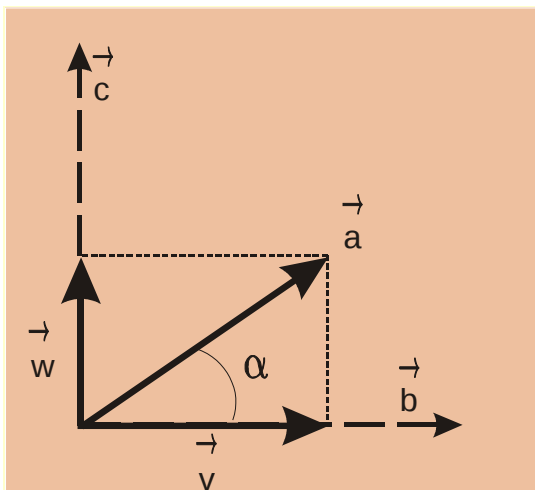
Descomposición de un vector dado como suma de dos vectores ortogonales (perpendiculares).- Dados los vectores

fijos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, no nulos, es posible proyectar el vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$ y sobre un vector fijo $\vec{c}$ perpendicular a $\vec{b}$ como se indica en la figura.

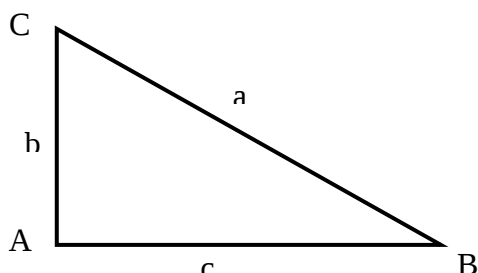
Como se observa en la figura $\vec{a} = \vec{v} + \vec{w}$, donde $\vec{v}$ es la proyección $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y $\vec{w}$ es la proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{c}$.

Por consiguiente: $|\vec{v}| = |\vec{a}| \cdot \text{sen}(\alpha)$ y

$$|\vec{w}| = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha)$$



Teorema de Pitágoras.- En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir: $a^2 = b^2 + c^2$



Demostración:

Teorema de la altura.- En un triángulo rectángulo, la altura es media proporcional entre los segmentos en que divide la hipotenusa. Es decir: $m / h = h / n \rightarrow h^2 = m \cdot n$

Demostración:

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras a los triángulos ABC, ACD y CDB, tenemos que:

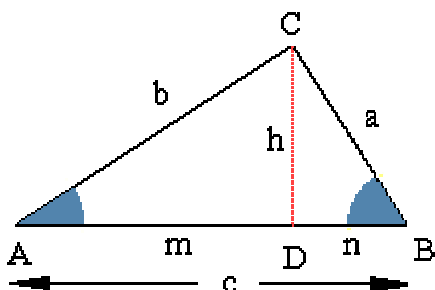
$$b^2 = h^2 + m^2, \quad a^2 = h^2 + n^2 \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Puesto que, además

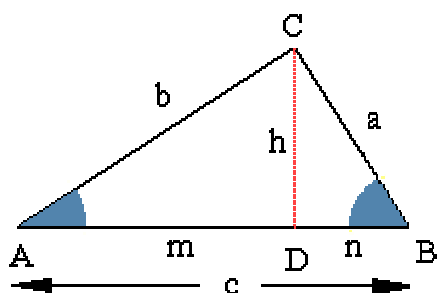
$$c^2 = (m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn$$

combinándolo todo, concluimos que:

$$2h^2 = b^2 - m^2 + a^2 - n^2 = c^2 - m^2 - n^2 = 2mn$$



Teorema del cateto. - En un triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella, es decir: $c/b = b/m \rightarrow b^2 = c.m$
Demostración:

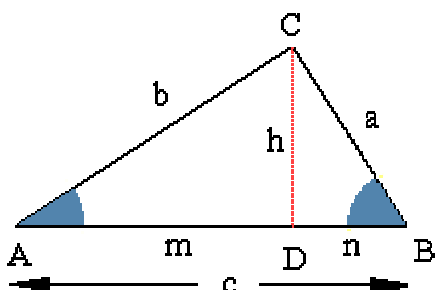


Como consecuencia de los teoremas anteriores, se tiene que

$$cm = (m + n)m = m^2 + nm = b^2 - h^2 + h^2 = b^2$$

Ejemplo: En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 8 cm y 4,5 cm respectivamente. Calcula las medidas de los catetos y de la altura sobre la hipotenusa.

Solución:



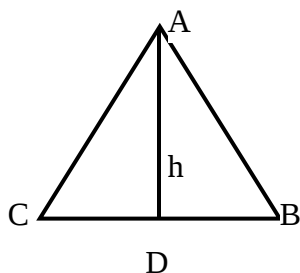
Aplicando el teorema de la altura sabemos que $h^2 = m.n$. En nuestro caso $h^2 = 8.4,5 \rightarrow h = 6$ cm

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo DCB, $a^2 = h^2 + n^2 \rightarrow a = \sqrt{6^2 + (4,5)^2} = 7,5$ cm

Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras al triángulo DAC, $b^2 = h^2 + m^2 \rightarrow b = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm

Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

I) Altura en un triángulo equilátero

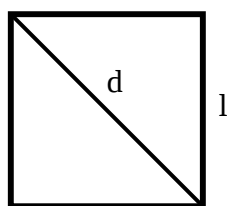


La altura AD, es eje de simetría y, por lo tanto, el punto medio del lado BC es D. Si el lado del triángulo mide L, entonces DB = L/2.

El triángulo ADB es rectángulo, por lo tanto según el teorema de Pitágoras: $(\overline{AB})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{DB})^2 \Rightarrow$

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}L^2} = \frac{L}{2}\sqrt{3}$$

II) Diagonal de un cuadrado



¿Cuánto vale la diagonal, d, en un cuadrado de lado l?

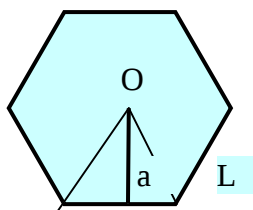
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\text{Diagonal del cuadrado } d = \sqrt{l^2 + l^2} = l\sqrt{2}$$

Ejemplo: Calcular la diagonal de un cuadrado de lado 6 cm.

Solución: Teniendo en cuenta la expresión que nos da el valor de la diagonal, tenemos que: $d = l\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm

III) Apotema de un hexágono regular



¿Cuál es el valor de la apotema de un hexágono regular de lado L ? Como cada uno de los seis triángulos que se forma al trazar los radios son equiláteros, la apotema es la altura de un triángulo

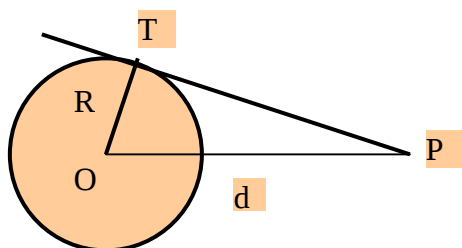
equilátero de lado L , es decir $a = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{2}\sqrt{3}$

Ejemplo: Determinar la longitud de la apotema de un hexágono de lado $L = 6$ cm.

Solución: Como sabemos que $a = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{2}\sqrt{3}$, en este caso

$$a = \frac{L}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm} = 5,20 \text{ cm}$$

IV) Longitud de la tangente desde un punto exterior



¿Cuál es la longitud de la tangente PT , sabiendo que la distancia OP es d y el radio de la circunferencia es R ?

El triángulo PTO , es rectángulo porque la tangente PT es perpendicular al radio OT . Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\overline{PT} = \sqrt{(\overline{OP})^2 - (\overline{OT})^2} = \sqrt{d^2 - R^2}$$

Ejemplo: Calcular la longitud de la tangente PT , sabiendo que la distancia OP es de 20 cm y el radio de la circunferencia es de 12 cm.

Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\overline{PT} = \sqrt{(\overline{OP})^2 - (\overline{OT})^2} = \sqrt{(20)^2 - (12)^2} = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$$