13. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

13.1 Introducción

El estudio matemátio del cálculo de probabilidades nace ligado a los juegos de azar. En el siglo XVI, el matemático italiano Cardano escribe el *Liber de Ludo Aleae* (libro de juegos de azar) en el que ya se comentan intuitivamente conceptos como los de equiprobabilidad y esperanza matemática. Varias décadas más tarde, Galileo resolvió problemas que surgieron asociados al juego de los dados. Parte de sus indagaciones sobre probabilidad fueron recogidas en el libro *Considerazione sopra il gioco di dadi* (consideraciones sobre el juego de los dados).

El auge de los juegos de azar en la sociedad francesa del siglo XVII provoca que un gran aficionado a estos juegos, el caballero de Meré, solicitase ayuda del matemático frances Pascal. Éste, a su vez, mantuvo numerosa correspondencia con Fermat sobre los problemas planteados. Esta correspondencia que está recogida en parte en el libro de Huygens *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, se considera el origen de la teoría de la probabilidad.

A finales del siglo XVII, Jacob Bernoulli enuncia una primera definición de probabilidad y establece la versión inicial de la ley de los grandes números para proporciones (marcando así el inicio de la utilización de la probabilidad para fines estadísticos). Esas nociones aparecieron recogidas, con mucha posterioridad, en su libro póstumo *Ars Conjectandi.*

Hacia final del siglo XVIII, Laplace formalizó los conceptos debidos a Bernoulli y ahondó en el problema de asignación de probabilidades. Uno de los méritos de este matemático fue el de divulgar la teoría de las probabilidades a lectores no especialistas en el tema.

En el siglo XX, el interés por la teoróa de la probabilidad resurgió con mucha fuerza a raíz de los trabajos de Kolmogoroff, que fue el primero que axiomatizó el concepto intuitivo de probabilidad, apoyándose en las herramientas matemáticas del momento: la teoría de conjuntos y la teoría de la medida. Gracias al avance tan espectacular de esta teoría nació la concepción actual de Estadística, en la que se obtienen conclusiones sobre modelos probabilísticos basadas en la información suministrada por los datos de la realidad.

Actualmente, la teoría de la probabilidad tiene amplísimas aplicaciones en campos tan diversos como la Química, la Economía, la Genética, la Computación, la Política o la Ingeniería.

13.2 Definiciones básicas

Un *experimento aleatorio* es aquel que cumple las propiedades siguientes:

- sus posibles resultados son conocidos de antemano.
- puede repetirse en idénticas condiciones cuántas veces se desee.
- el resultado de una realización concreta no se puede conocer con anterioridad.

El *espacio muestral* asociado a un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del mismo. Lo denotaremos por E.

Los *sucesos* son cada uno de los subconjuntos del espacio muestral.

Los sucesos formados por un único elemento se denominan *sucesos elementales*. El conjunto $\emptyset$ es el *suceso imposible*, mientras que E es el *suceso seguro*. Dado un susceso A, su *contrario o complementario* es $\overline{A}$.

Ejemplo 1: Lanzamiento de un dado. Aquí se tiene el espacio muetral E y el conjunto de posibles sucesos S.

$$\begin{aligned} E &= \{1,2,3,4,5,6\}, \\ S &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}, \{1,2\}, \ldots, \{5,6\}, \{1,2,3\}, \ldots, \{1,2,3,4,5,6\}\} \end{aligned}$$

El suceso, "obtener par" es $A = \{2,4,6\}$ y su contrario es $\overline{A} = \{1,3,5\}$, "obtener impar".

A la hora de expresar ciertos sucesos de formas equivalentes resulta de utilidad la definición $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ y las leyes de De Morgan:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ y } \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

13.3 Noción de probabilidad.

El concepto abstracto de probabilidad se formalizó hacia principios del siglo XX con la axiomática de Kolmogoroff.

Dado un espacio muestral (E, S), una probabilidad sobre dicho espacio no es más que una función $P : S \longrightarrow \mathbb{R}$, que verifica

1. $P(A) \geq 0$, $\forall A \in S$.
2. $P(E) = 1$.
3. $A, B \in S$ con $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Propiedades:

1. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

2. $P(\emptyset) = 0$.

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.

5. $A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$.

Como consecuencia del tercer axioma, para cualquier espacio muestral finito, basta asignar las probabilidades de los sucesos elementales. La de cualquier otro suceso viene dada por la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen. En caso de que además dicha asignación sea equiprobable, es decir todos los sucesos elementales tengan la misma probabilidad, se obtiene la llamada *regla de Laplace*:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#E} = \frac{\text{“Casos Favorables”}}{\text{“Casos Posibles”}}.$$

Ejemplo 2: En el ejemplo del lanzamiento de un dado, suponiendo el dado perfectamente simétrico y otorgando, por tanto, igual probabilidad a los seis posibles valores, se tiene

$$\begin{aligned} P(\{1\}) &= P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}. \\ P(A) &= \sum_{i \in A} P(\{i\}). \end{aligned}$$

13.4 Probabilidad condicionada

13.4.1 Experimentos compuestos

Un *experimento compuesto* es el que se realiza en dos o más fases. Formalmente hablando, los posibles resultados de un experimento compuesto pueden verse como elementos del producto cartesiano de los conjuntos de posibles resultados de cada fase del experimento.

Ejemplo 3: Se dispone de dos urnas, A y B, con la siguiente composición. La urna A tiene 9 bolas blancas y 1 negra, mientras que la urna B tienen una bola blanca y 9 negras. En un experimento realizado se procede de la siguiente forma: se lanza una moneda. Si el resultado es cara, se toma al azar una bola de la urna A. Si es cruz se elige al azar un bola de la urna B.

Denotando por C y $+$ los resultados de “cara” y “cruz” para la moneda y por B y N los resultados de bola “blanca” y “negra”, el conjunto de posibles resultados puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \{(C,B),(C,N),(+,B),(+,N)\} &= E_1 \times E_2, \text{ con} \\ E_1 &= \{C,+\} \text{ y } E_2 = \{B,N\}. \end{aligned}$$

Está claro que los cuatro posibles resultados no son equiprobables, ya que

$$\begin{aligned} P(\{(C,B)\}) &= P(\{(+,N)\}) = \frac{9}{20}, \\ P(\{(C,N)\}) &= P(\{(+,B)\}) = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned} P\{\text{“bola blanca”}\} &= P(\{(C,B)\}) + P(\{(+,B)\}) = \frac{1}{2}. \\ \text{Análogamente } P\{\text{“bola negra”}\} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

13.4.2 Definición de probabilidad condicionada

Si en el ejemplo anterior quien realiza el experimento nos suministra la información de que el resultado de la moneda fue cara, entonces intuitivamente la probabilidad de que la bola extraída sea blanca pasa a ser $\frac{9}{10}$, en lugar del valor $\frac{1}{2}$ calculado anteriormente. Esto es así porque la información suministrada altera la probabilidad del suceso en cuestión.

Dados dos sucesos A y B, con $P(B) > 0$, se define *probabilidad del suceso A condicionada a B* como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo 4: En el ejemplo anterior, la probabilidad de que la bola extraída sea blanca sabiendo que el resultado del lanzamiento de la moneda fue cara es

$$P(\text{Blanca}|\text{Cara}) = \frac{P(\text{Blanca} \cap \text{Cara})}{P(\text{Cara})} = \frac{P(\{(C,B)\})}{P(\{(C,B),(C,N)\})} = \frac{9}{10},$$

que es lo que intuitivamente se esperaba.

A partir de la definición de probabilidad condicionada se tiene:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A),$$

lo cual permite calcular la probabilidad de una intersección a través de una condicionada.

Ejemplo 5: De una baraja española de 40 cartas se extraen dos, primero sin y luego con reemplazamiento. La probabilidad de obtener dos oros puede calcularse fácilmente haciendo uso de probabilidades condicionadas. Denotando O_i: "la i-ésima carta extraída es de oros", cuando no hay reemplazamiento se tiene

$$P(O_1 \cap O_2) = P(O_2|O_1) \cdot P(O_1) = \frac{9}{39} \cdot \frac{10}{40} = \frac{3}{52} = 0.0577,$$

mientras que con reemplazamiento resulta

$$P(O_1 \cap O_2) = P(O_2|O_1) \cdot P(O_1) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16} = 0.0625.$$

13.4.3 Independencia de sucesos

Cuando la ocurrencia o no de un suceso B no afecta a la probabilidad de ocurrencia de otro suceso A, intuitivamente diremos que ambos sucesos son independientes. Esto se formaliza a continuación.

Dos sucesos A y B se dicen *independientes* si se verifica:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

En caso contrario se dirán dependientes.

Obviamente, si dos sucesos son independientes, entonces se verifica

$$P(A) = P(A|B) \text{ y } P(B) = P(B|A),$$

siempre que estas probabilidades condicionadas tengan sentido (es decir, $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$).

Ejemplo 6: En el experimento compuesto de la moneda y las urnas resulta inmediato comprobar que "cara" y "blanca" son sucesos dependientes (ya que $P(\text{Blanca}|\text{Cara}) = \frac{9}{10} \neq \frac{1}{2} = P(\text{Blanca})$). En el de la extracción de dos cartas también puede probarse fácilmente que O_1 y O_2 son sucesos independientes si hay reemplazamiento ($\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$), pero no lo son cuando no hay reemplazamiento ($\frac{3}{52} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$).

13.4.4 Reglas del producto, de las probabilidades totales y de Bayes

A continuación se enuncian tres resultados que pueden ser útiles para el cálculo de probabilidades. En primer lugar el resultado para calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos a partir de la probabilidad condicionada puede extenderse a la intersección de un número finito de sucesos. Es la conocida *regla del producto.*

Dados sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, se verifica

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Ejemplo 8: Calcular la probabilidad de obtener oros, oros, copas, copas y copas en cinco extracciones, sin reemplazamiento, de una baraja española de 40 cartas. Usando la notación O_i introducida anteriormente y denotando C_i: "la i-ésima carta extraída es de copas", se tiene

$$\begin{aligned} P(O_1 \cap O_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5) &= P(O_1) \cdot P(O_2|O_1) \\ &\quad \cdot P(C_3|O_1 \cap O_2) \cdot P(C_4|O_1 \cap O_2 \cap C_3) \\ &\quad \cdot P(C_5|O_1 \cap O_2 \cap C_3 \cap C_4) \\ &= \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{10}{38} \cdot \frac{9}{37} \cdot \frac{8}{36} \\ &= \frac{15}{18278} = 0.00082066 \end{aligned}$$

Cuando (en un experimento compuesto, por ejemplo) la probabilidad de un suceso es difícil de calcular directamente pero resulta sencillo calcular dicha probabilidad condicionada a otros posibles sucesos previos, puede utilizarse la llamada regla de las probabilidades totales.

Dados sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ incompatibles dos a dos (esto es $A_i \cap A_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$) y cuya unión es todo el espacio muestral (es decir. $E = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$) y otro suceso B, la probabilidad de este último puede calcularse a partir de

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B|A_n) \cdot P(A_n).$$

Ejemplo 9: Para el ejemplo de la moneda y las urnas,

$$\begin{aligned} P(\text{Blanca}) &= P(\text{Blanca}|\text{Cara})\, P(\text{Cara}) + P(\text{Blanca}|\text{Cruz})\, P(\text{Cruz}) \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para el de las cartas (sin reemplazamiento), se tiene

$$\begin{aligned} P(O_2) &= P(O_2|O_1)\, P(O_1) + P(O_2|O_1^c)\, P(O_1^c) \\ &= \frac{9}{39} \cdot \frac{10}{40} + \frac{10}{39} \cdot \frac{30}{40} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En ocasiones, en un experimento compuesto, se desea calcular la probabilidad de un resultado en una fase intermedia condicionada al resultado de la etapa final del mismo. En circunstancias como esas y en otras muchas resulta de utilidad la *regla de Bayes*.

Regla de Bayes: Dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral y sea B otro suceso. La probabilidad de uno de los sucesos A_i condicionada a B puede obtenerse como

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)}.$$

Ejemplo 10: En el experimento compuesto del lanzamiento de la moneda y las urnas, si un observador nos informa de que la bola extraída es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del lanzamiento de la moneda sea cara?

$$\begin{aligned} P(\text{Cara}|\text{Blanca}) &= \frac{P(\text{Blanca}|\text{Cara})\, P(\text{Cara})}{P(\text{Blanca}|\text{Cara})\, P(\text{Cara}) + P(\text{Blanca}|\text{Cruz})\, P(\text{Cruz})} \\ &= \frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$