12. ANÁLISIS COMBINATORIO

12.1 Introducción

La combinatoria es la parte de las matemáticas que estudia el número de configuraciones distintas que se pueden hacer con los elementos de un conjunto. Según el criterio usado, la importancia de la ordenación de los elementos o que puedan aparecer elementos repetidos, se tendrán diferentes formas de contar que darán nombre a las agrupaciones.

12.2 Variaciones

Las variaciones se pueden definir como los distintos grupos que se pueden formar con los elementos de un conjunto, donde el orden tiene importancia, es decir dos grupos serán distintos cuando tienen distintos elementos o cuando teniendo los mismos están en diferente orden. Dependiendo de si pueden repetirse o no estos elementos se distinguirá entre variaciones con repetición y sin repetición.

12.2.1 Variaciones sin repetición

Dado un conjunto de m elementos distinguibles, se denominan *variaciones de m tomadas de n en n* a los diferentes grupos de n ($n \leq m$) elementos distintos que pueden formarse de modo que dos grupos se diferencien en que tienen algún elemento distinto o por la ordenación de sus elementos.

El número de variaciones sin repetición es:

$$V_{m,n} = m^{(n)} = m(m-1)(m-2)...(m-n+1).$$

Las variaciones de m tomadas de n en n son las diferentes muestras ordenadas de tamaño n seleccionadas en un muestreo sin reemplazamiento de una población de m individuos.

Ejemplo 1: En una clase de 30 alumnos se va a elegir una terna para ocupar los puestos de Presidente, Secretario y Tesorero ¿ cuántas ternas diferentes pueden formarse?

Esta claro que se trata de $V_{30,3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$ serán las distintas posibilidades de elección

12.2.2 Variaciones con repetición

Si al formar los grupos que constituyen las variaciones los elementos **pueden tomarse repetidos** se obtienen las *variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n."*

El número de variaciones con repetición es:

$$VR_{m,n} = m^n.$$

Las variaciones con repetición de m tomadas de n en n son las diferentes muestras ordenadas de tamaño n seleccionadas en un muestreo con reemplazamiento de una población de m individuos.

Ejemplo 2: Cuántos números de dos cifras se pueden formar con los números 1,2,3,4 y 5.

En este caso se pueden utilizar cualquiera de las cifras tanto para el lugar de las decenas como para las unidades, se trataría pues de variaciones de 5 elementos tomados de dos en dos, es decir:

$$VR_{5,2} = 5^2 = 25.$$

12.3 Permutaciones

12.3.1 Permutaciones sin repetición

Las *permutaciones de m elementos* son las diferentes ordenaciones que pueden hacerse con los m elementos. Por tanto, coinciden con las variaciones sin repetición de m elementos tomados de m en m.

El número de permutaciones es:

$$P_m = m! = m(m-1)(m-2)...1.$$

Ejemplo 3: Una enciclopedia de 5 volúmenes, de cuántas formas distintas se puede colocar en una estantería

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

12.3.2 Permutaciones con repetición

Considérese un conjunto de m elementos de los cuales r son distintos, apareciendo el primero n_1 veces, el segundo n_2 veces, ..., el r-ésimo n_r veces, con $n_1 + n_2 + ... + n_r = m$. A las diferentes ordenaciones de este conjunto de m elementos se les denomina *permutaciones con repetición.*

El número de permutaciones con repetición es:

$$PR_m^{n_1,n_2,...,n_r} = \frac{m!}{n_1!\ n_2!...n_r!}.$$

Las permutaciones con repetición representan las diferentes particiones de r grupos que pueden hacerse en un colectivo de m individuos de forma que en el primer grupo hay n_1 individuos, en el segundo n_2,... y en el r-ésimo hay n_r.

Ejemplo 4: Si en un aula de 15 alumnos y se desea formar tres equipos de baloncesto (cada equipo de 5 jugadores). ¿Cuántas posibilidades hay para cada uno?.

$$PR_{15}^{5,5,5} = \frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} = 756756.$$

12.4 Combinaciones

Las combinaciones se definen como el número de distintos grupos que se pueden hacer con un conjunto de elementos de forma que no importa el orden en el que se encuentren estos elementos. Dependiendo de si en cada grupo puede aparecer repetido el mismo elemento o no se distinguirán entre combinaciones con repetición y sin repetición.

Para el cálculo del número de combinaciones es útil la siguiente definición si n y k son dos números naturales tales que $k \leq n$, el *número combinatorio* $\binom{n}{k}$ está dado por la expresión,

$$\binom{n}{k} := \frac{n^{(k)}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)....1}$$

Propiedades:

1. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{1} = n$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
4. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$

5. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

6. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$

Un resultado importante, que permite mediante expresiones con números combinarios expresar la potencia de un binomio es el denominado *Binomio de Newton* que dice que dados dos números cualesquiera a y b y un entero positivo n se verifica que:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

12.4.1 Combinaciones sin repetición

Dado un conjunto de m elementos distinguibles, se denominan *combinaciones de m tomadas de n en n* a los diferentes grupos de n elementos que pueden formarse de modo que dos grupos se diferencien en que tienen algún elemento distinto (no importa el orden).

El número de combinaciones sin repetición es:

$$C_{m,n} = \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}$$

Las combinaciones de m tomadas de n en n son las diferentes subpoblaciones (muestras en las que no se considera el orden) de tamaño n seleccionadas en un muestreo sin reemplazamiento de una población de m individuos.

Ejemplo 5: Se consideran ocho puntos en un plano $P_1, P_2, ...P_8$ de los que no hay tres en una misma recta.
¿Cúantas rectas pasan por dos de los ocho puntos?¿Cúantos triángulos determinan estos ocho puntos?

El número de rectas coincidirá con el número de combinaciones de esos 8 puntos tomadas de dos en dos: $C_{8,2} = 28$

Del mismo modo el número de triángulos es: $C_{8,3} = 56$.

12.4.2 Combinaciones con repetición

Si al formar los grupos que constituyen las combinaciones los elementos pueden tomarse repetidos se obtienen las *combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n.*

El número de combinaciones con repetición es:

$$CR_{m,n} = \left(\begin{array}{c} m+n-1 \\ n \end{array} \right)$$

Las combinaciones con repetición de m tomadas de n en n son las diferentes subpoblaciones de tamaño n seleccionadas en un muestreo con reemplazamiento de una población de m individuos.

Ejemplo 6: ¿Cúantas muestras de tres personas se pueden formar eligiendo aleatoriamente números de un listin telefónico de 100 individuos?.

En este caso en cada muestra no importa el orden en que se obtenga cada individuo, y como en cada secuencia vuelve a elegirse un nuevo número aleatorio es posible que pueda salir seleccionada la misma persona más de una vez, por lo que estamos contemplando la posibilidad de repetición, el número de muestras es:

$CR_{100,3} = \left(\begin{array}{c} 100+3-1 \\ 3 \end{array} \right) = \frac{102 \cdot 101 \cdot 100}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 171700.$

Es interesante poder resumir las distintas formas de contar en una tabla, así, el número de muestras de tamaño n que se pueden elegir de una población de m individuos, se puede averiguar teniendo en cuenta si se pueden o no repetir los elementos y si importa o no el orden, esto se resume en la tabla siguiente:

	Si importa el orden	No Importa el orden
No se pueden repetir	$V_{m,n}$	$C_{m,n}$
Si se pueden repetir	$VR_{m,n}$	$CR_{m,n}$