ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 16

Cuádricas (Curso 2010–2011)

NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el espacio afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.

1.– Clasificar y esbozar un dibujo de la cuádrica

$$2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0.$$

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

2.– Clasificar la cuádrica de ecuación:

$$5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 6xy + 2x + 4y - 6z + 1 = 0.$$

(Examen final, junio 2008)

3.– Escribir la ecuación de:

(a) una cuádrica no degenerada que no contenga elipses.

(b) una cuádrica no degenerada que contenga elipses e infinitas rectas.

(c) una cuádrica que contenga elipses, parábolas e hipérbolas.

(Examen final, septiembre 2009)

4.– Consideramos la familia de cuádricas de $\mathbb{R}^3$:

$$Q_{\alpha,\beta} : x^2 + \alpha z^2 + 2\beta x + 2\beta y + 2\beta z = 0$$

Clasificar en función de α y β las diferentes cuádricas que pueden aparecer.

(Examen final, diciembre 2005)

5.– En el espacio euclídeo y respecto de una referencia rectangular, se consideran las cuádricas que admiten por ecuaciones:

$$x^2 - 2y^2 + az^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0, \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificar dichas cuádricas según los distintos valores de a.

(Examen final, septiembre 2006)

6.– En el espacio afín y con respecto a una referencia rectangular se consideran las cuádricas de ecuaciones:

$$ax^2 + (1-a)y^2 + az^2 + 2(1-a)xz + 2x + 2z + 3 = 0,$$

con $a \in \mathbb{R}$. Clasificar las cuádricas en función del parámetro a.

(Examen final, diciembre 2007)

7.– Para las cuádricas que se relacionan a continuación, se pide clasificarlas, determinar sus ecuaciones reducidas, si están formadas por planos hallar sus ecuaciones y calcular, en los casos en que existan: centros, puntos singulares, planos principales, ejes y vértices.

(a) $2x^2 - 2yz - 4x + 8z + 10 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 6xz + 6yz - 4x - 8y - 4 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 6x + 4y + 2z + 13 = 0$

(d) $xy = 1$

(e) $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 6x - 12y - 12z = 0$

(f) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz = 0$

(g) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 3x - 3y - 3z + 2 = 0$

Para la cuádrica del apartado (a), calcular además: el cono tangente desde el punto $(1, 0, 0)$, el polo del plano $y - 3z - 12 = 0$ y el plano tangente por el punto $(0, 9, 1)$.

8.– Definimos la aplicación:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3; \qquad \phi(a, b) = (ab, a, b)$$

Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x - yz = 0\}$.

(a) ¿Es ϕ una aplicación lineal?. ¿Es inyectiva?. ¿Es sobreyectiva?. ¿Es biyectiva?.

(b) Clasificar la cuádrica C.

(c) Probar que $Imf = C$.

(d) Responder a las preguntas del apartado (a) para la aplicación

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow C; \qquad \psi(a, b) = \phi(a, b)$$

(e) Si $P = (y_0 z_0, y_0, z_0)$ es un punto de la cuádrica C, calcular el plano tangente a C en P.

(f) Calcular la ecuación paramétrica de las rectas que forman la intersección de dicho plano tangente con la cuádrica. Comprobar que son imagen por ψ de dos rectas de $\mathbb{R}^2$.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

9.– Clasificar, en función del parámetro λ, la cuádrica:

$$(4 - \lambda)x^2 + 2y^2 - \lambda z^2 + 4xy + 2\lambda xz + 4x - 4z - \lambda = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2009)

10.– Encontrar la única respuesta correcta, en las siguientes cuestiones:

(a) En el espacio geométrico ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, la cuádrica de ecuación $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ es:

- ○ Un hiperboloide reglado y de revolución.
- ○ Un hiperboloide de revolución pero no reglado.
- ○ Un hiperboloide reglado pero no de revolución.

◯ Un hiperboloide que no es reglado ni es de revolución.

(Segundo parcial, junio 2002)

(b) De una cuádrica se sabe que todos los planos diametrales son paralelos entre sí. ¿De qué cuádrica se trata?

◯ Cilindro hiperbólico.

◯ Cilindro parabólico.

◯ 2 planos secantes reales.

◯ Paraboloide elíptico.

(Segundo parcial, junio 1999)

(c) En el Espacio Geométrico Ordinario

◯ todas las cuádricas no degeneradas tienen al menos 3 planos principales.

◯ todas las cuádricas imaginarias tienen al menos un centro.

◯ ninguna cuádrica degenerada tiene 3 ejes perpendiculares.

◯ si una cuádrica tiene infinitos centros, entonces tiene 1 eje.

(Segundo parcial, junio 1998)