ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 4.1

Cónicas — (Curso 2010–2011)

NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el plano afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.

1.– En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y = 0$$

Calcular la ecuación de las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(-1, -3)$.

2.– Dada la cónica de ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 4y = 0$ respecto a una referencia rectangular, calcular centro, direcciones asíntoticas, asíntotas, diámetros, ejes, vértices.

(Examen final, junio 2006)

3.– Dada la cónica $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 1 = 0$, se pide:

(a) Determinar las rectas tangentes a la cónica desde el origen de coordenadas.

(b) Determinar las rectas tangentes a la cónica desde el punto $(1, 1)$.

(c) Determinar la recta tangente a la cónica por el punto $(0, -1)$.

4.– Se considera la cónica dada por la ecuación:

$$3y^2 - 4xy + 12x - 14y + 19 = 0$$

b) Hallar las asíntotas.

c) Calcular las tangentes exteriores a la cónica pasando por el punto $(0, 3)$.

5.– Para las siguientes cónicas

(1) $5x^2 + 5y^2 - 4 = 0$

(2) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 6 = 0$

(3) $6y^2 + 8xy - 8x + 4y - 8 = 0$

(4) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 = 0$

(5) $x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0$

(6) $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

(7) $x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 2 = 0$

(8) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6y = 0$

(9) $4x^2 + 4y^2 + 8xy + 4x + 4y + 1 = 0$,

determinar: centros, puntos singulares, direcciones asintóticas, asíntotas, ejes, vértices.

6.– Para las cónicas del problema anterior se pide:

(a) Clasificarlas sin hallar las ecuaciones reducidas.

(b) Dar las ecuaciones reducidas de las no degeneradas y las rectas que forman las degeneradas.

(c) En los casos en que existan, determinar focos, directrices y excentricidad.

7.– Dada la cónica de ecuación:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2 = 0$$

Clasificarla, hallar su ecuación reducida y sus vértices.

(Examen final, junio 2009)

8.– En el plano afín y con respecto a la referencia canónica se considera la cónica de ecuacin:

$$x^2 + y^2 + 4xy + 3x + 3y + 1 = 0.$$

Se pide:

i) Clasificar la cónica.

ii) Hallar el centro y los ejes.

iii) Hallar la ecuación reducida y la ecuación de cambio de referencia.

iv) Hallar la distancia entre ambos focos.

v) Hallar una paralela al eje focal que pase por el punto $(2, 0)$.

(Segundo parcial, junio 2010)

9.– Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro $k \in R$:

$$x^2 + 8xy + ky^2 - 2x + 2ky = 0$$

a) Clasificar las cónicas en función de k.

b) Para $k = 1$ hallar la distancia entre sus dos focos.

c) Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.

(Segundo parcial, junio 2008)

10.– Hallar las ecuaciones de

(a) la cónica que pasa por $A(2, 0)$, $B(0, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 0)$ y $E(1, -1)$.

(b) la cónica cuyo centro es $C(1, 1)$ y tal que $y = 1$ es un eje y la polar del punto $(2, 2)$ es la recta $x + y - 3 = 0$.

(c) la elipse cuyos focos están en los puntos $(0, 0)$ y $(4, 2)$ y sabiendo además que al menos uno de los vértices del eje menor se encuentra en la parábola de ecuación $5x^2 + 10y - 34 = 0$. **(Examen extraordinario, diciembre 2007)**

(d) una hipérbola que pasa por el origen, tiene por asíntota la recta $x - 2y - 1 = 0$ y uno de sus ejes es la recta $x - y - 1 = 0$. **(Examen extraordinario, septiembre 2010)**

(e) una parábola que pasa por los puntos $P = (0, 2)$, $Q = (1, 0)$ y tal que la recta que une P y Q es la recta polar del punto $(0, 0)$. **(Examen final, junio 2008)**

(f) una parábola que tiene por eje la recta $x - y + 1 = 0$ y es tangente en el origen a la recta $x - 2y = 0$. **(Examen final, junio 2010)**

(g) una elipse cuyo centro es el $(1, 2)$, una directriz tiene de ecuación $y = 6$ y uno de los vértices está sobre el eje OX. **(Segundo parcial, mayo 2001)**

(h) una hipérbola que pasa por el origen, uno de cuyos ejes es la recta $y = x + 1$ y una de cuyas asíntotas es la recta $y = 2x + 1$. **(Examen extraordinario, septiembre 2001)**

(i) la parábola C tal que: la recta de ecuación $x + y - 2 = 0$ es la tangente a C en el vértice; C pasa por el origen de coordenadas; y la recta polar del punto (2,1) con respecto a C es paralela al eje OX.

11.– Calcular la ecuación de una parábola que tiene el foco sobre la recta $x+2 = 0$, el vértice sobre la recta $y - 1 = 0$ y por directriz la recta $x - y = 0$.

(Segundo parcial, junio 2009)

12.– En un haz de cónicas generado por dos cónicas que no son de tipo parábolico, ¿cuál es el máximo número de parábolas que puede haber?.

(Segundo parcial, junio 2009)

13.– Calcular la ecuación de una elipse tangente a los ejes de coordenadas en los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y tangente a la recta $x + y - 2 = 0$.

(Segundo parcial, junio 2007)

14.– Calcular la ecuación de una parábola de eje $2x - y = 0$, vértice $(0, 0)$ y que pasa por el punto $(5, 0)$.

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

15.– Encontrar la única respuesta correcta, en las siguientes cuestiones:

(a) Una ecuación reducida de la cónica $(x + 2y)^2 + 2y = 0$ es

○ $(x'')^2 + 4(y'')^2 - 1 = 0$

○ $(x'')^2 + 2(y'')^2 = 0$

○ la ecuación dada ya es reducida

○ ninguna de las restantes respuestas es correcta

(Segundo parcial, junio 2002)

(b) Si tenemos un haz de cónicas $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ donde C_1 es una cónica formada por dos rectas paralelas y C_2 otra cónica formada por otras dos rectas paralelas, pero no paralelas a las de C_1,

○ todas las cónicas del haz son degeneradas.

○ todas las cónicas del haz son de tipo parabólico.

○ las únicas cónicas degeneradas del haz son C_1 y C_2.

- ◯ las únicas cónicas de tipo parabólico del haz son C_1 y C_2.

(Segundo parcial, junio 1999)

(c) La familia de cónicas $3x^2 + 2kxy + 4x + 2ly + 1 = 0$ con $k, l \in \mathbb{R}$

- ◯ para $k = 0$ contiene sólo parábolas.
- ◯ contiene alguna circunferencia.
- ◯ contiene algún par de rectas secantes reales.
- ◯ contiene alguna cónica sin direcciones asintóticas reales.

(Segundo parcial, junio 1997)

I.– Para cada número $k \in R$ se define la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2kxy + y^2 - 1 = 0.$$

(i) Clasificar la cónica en función de los valores de k.

(ii) Cuando tenga sentido, calcular al excentricidad de la cónica en función de k.

(Segundo parcial, junio 2010)

II.– Se dice que una hipérbola es *equilátera* cuando sus asíntotas son perpendiculares.

(a) Demostrar que una cónica no degenerada es una hipérbola equilátera si y sólo si es nula la traza de su matriz T de coeficientes cuadráticos, con respecto a una referencia rectangular.

(b) Encontrar todas las hipérbolas equiláteras que tengan la recta $y = 2x$ por eje focal.

III.– En el plano afín euclídeo dotado de un sistema de referencia rectangular, se pide hallar todas las elipses cuyas directrices sean $x = -2$ y $x = 6$ y que tengan un vértice en cada uno de los ejes coordenados.

(Examen final, julio 2002)

IV.– Se consideran las cónicas C_1 y C_2 de ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \quad x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0 \\ C_2 &\equiv \quad xy + y^2 - 2x + y - 8 = 0. \end{aligned}$$

Hallar la ecuación de la cónica no degenerada que pasa por los puntos de intersección de C_1 y C_2 y tiene el centro sobre la recta $x - y - 2 = 0$.

(Examen extraordinario, diciembre 2010)

V.– En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular, se pide hallar la ecuación de una elipse para la que los dos vértices que pertenecen a un eje son los puntos $(2, 1)$ y $(0, -1)$ y que la distancia entre sus dos focos es 4.

(Examen final, junio 2003)

VI.– En el plano afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular, consideramos la cónica C dada por la ecuación:

$$x^2 + 4y^2 - 4x = 0$$

(a) Encontrar la ecuación de otra cónica C' pasando por el punto $(2, 1)$, cuyas asíntotas son paralelas los ejes de C y cuyo centro es el $(1, 1/2)$.

(b) Determinar la ecuación de una parábola que pase por los puntos de corte de C y C'.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VII.– Hallar la ecuación de una hipérbola una de cuyas asíntotas es la recta $x + 2y - 2 = 0$, la otra asíntota es paralela al eje OY y sabiendo que la polar del punto $(1, 0)$ es la recta $x + y - 3 = 0$.

(Segundo parcial, mayo 2005)

VIII.– Calcular la ecuación de una cónica de centro el punto $(0, 1)$, tangente a la recta $x + y = 0$ en el punto $(1, -1)$ y que tiene por asíntota la recta $y = 1$.

(Examen final, junio 2009)

IX.– En el plano afín euclídeo y referido a un sistema de referencia rectangular, determinar las cónicas que pasan por $P(0, 2)$ y $Q(0, 4)$, tienen una asíntota paralela a la recta $y - 4x = 0$ y cortan al eje OX en puntos A y B tales que $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 2$.

(Examen extraordinario, septiembre 1998)

X.– En el plano afín euclídeo y en un sistema de referencia rectangular, hallar las ecuaciones generales y matriciales de todas las cónicas no degeneradas, que tengan por focos $F(0, 0)$ y $F'(2, 4)$ y cuya distancia del centro a uno de los vértices es 2.

(Examen extraordinario, septiembre 1997)

XI.– Para cada número real a definimos la cónica de ecuación:

$$9x^2 + ay^2 - 6axy + 3a - 12 = 0.$$

i) Clasificiar las cónicas dependiendo de los valores de a.

ii) En aquellos casos en los que las cónicas sean degeneradas escribir las ecuaciones de las rectas que las forman.

(Examen extraordinario, diciembre 2010)

XII.– Calcular la ecuación de una parábola cuyo foco es el punto $(1, 1)$ y el vértice el punto $(2, 3)$. Escribir además su ecuación reducida.

(Examen final, junio 2007)

XIII.– En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, calcular la ecuación de una cónica no degenerada cuyo único eje es la recta $y = 2x$ y es tangente a la recta $y = 0$ en el punto $(1, 0)$.

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

XIV.– El el plano afín E_2 y con respecto a un sistema de referencia rectangular, se considera el pentágono irregular de vértices:

$$A = (0,0); \quad B = (1,1); \quad C = (1,3); \quad D = (0,4); \quad E = (-1,2).$$

(a) Calcular la ecuación de una elipse circunscrita a este pentágono.

(b) Hallar el centro y los ejes de la elipse.

(Examen final, diciembre 2005)