

*NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el plano afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.*

- 1.— En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y = 0$$

Calcular la ecuación de las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto  $(-1, -3)$ .

---

- 2.— En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica.
- (ii) Hallar su centro, ejes, vértices y asíntotas.
- (iii) Calcular su ecuación reducida, excentricidad y distancia del vértice al foco.

**(Examen final, mayo 2018)**

---

- 3.— Se considera la cónica dada por la ecuación:

$$3y^2 - 4xy + 12x - 14y + 19 = 0$$

- b) Hallar las asíntotas.
  - c) Calcular las tangentes exteriores a la cónica pasando por el punto  $(0, 3)$ .
- 

- 4.— Para las siguientes cónicas

(1)  $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0$

(2)  $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 6 = 0$

(3)  $6y^2 + 8xy - 8x + 4y - 8 = 0$

(4)  $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 = 0$

(5)  $x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0$

(6)  $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

(7)  $x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 2 = 0$

(8)  $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6y = 0$

(9)  $4x^2 + 4y^2 + 8xy + 4x + 4y + 1 = 0,$

determinar: centros, puntos singulares, direcciones asintóticas, asíntotas, ejes, vértices.

---

5.— Para las cónicas del problema anterior se pide:

- (a) Clasificarlas sin hallar las ecuaciones reducidas.
- (b) Dar las ecuaciones reducidas de las no degeneradas y las rectas que forman las degeneradas.
- (c) En los casos en que existan, determinar focos, directrices y excentricidad.

---

6.— En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0$$

- (i) Clasificar la cónica y dar su ecuación reducida canónica.
- (ii) Hallar el centro, sus asíntotas, ejes, vértices y excentricidad.
- (iii) Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto  $(-3, -1)$ .

**(Examen final, mayo 2023)**

---

7.— En el plano afín para cada  $k \in \mathbb{R}$ , se define la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2kxy + y^2 + 2y + 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica en función de los valores de  $k$ .
- (ii) Para  $k = 2$  hallar el centro, los ejes y la excentricidad.
- (iii) Demostrar que el eje  $OY$  es tangente a la cónica en un mismo punto  $P$  que no depende del valor de  $k$ . Hallar  $P$ .

**(Examen final, julio 2023)**

---

8.— En el plano afín y para cada  $k \in \mathbb{R}$  se define la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2xy + ky^2 - 2x + 2ky - 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica en función de los valores de  $k$ .
- (ii) Para  $k = 0$ :
  - (ii.a) Hallar las asíntotas y la excentricidad de la cónica.
  - (ii.b) Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto  $(0, 0)$ .

**(Examen final, mayo 2024)**

---

9.— En el plano afín se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2kxy + y^2 + 2ky = 0$$

- (i) Clasificar la cónica en función de los valores de  $k$  (0.5 puntos)
- (ii) Para  $k = 2$  y  $k = -1$  hallar el centro, los ejes, las asíntotas y la excentricidad. (1 punto)
- (iii) Calcular la ecuación de una elipse que tiene un foco en el punto  $F(1, 0)$ , un eje es la recta  $x - y = 0$  y pasa por el punto  $(1, 1)$ . (1 punto)

**(Examen final, julio 2020)**

---

10.— Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro  $a \in R$ :

$$x^2 + 8xy - ay^2 - 2x - 2ay = 0$$

- a) Clasificar las cónicas en función de  $a$ .
- b) Para  $a = -1$  hallar la distancia entre sus dos focos.
- c) Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.

**(Examen final, julio 2015)**

---

11.— Hallar las ecuaciones de

- (a) una parábola sabiendo que pasa por los puntos  $P = (0, 3)$ ,  $Q = (2, 6)$  y tiene por eje la recta  $x - y + 1 = 0$ . **(Examen final, mayo 2016)**
- (b) la cónica cuyo centro es  $C(1, 1)$  y tal que  $y = 1$  es un eje y la polar del punto  $(2, 2)$  es la recta  $x + y - 3 = 0$ .
- (c) la ecuación de una elipse de centro el origen, que tiene por foco el punto  $F(1, 1)$  y pasa por el punto  $(1, -1)$  **(Examen final, julio 2016)**
- (d) una hipérbola que pasa por el origen, tiene por asíntota la recta  $x - 2y - 1 = 0$  y uno de sus ejes es la recta  $x - y - 1 = 0$ . **(Examen extraordinario, septiembre 2010)**
- (e) una parábola que pasa por los puntos  $P = (0, 2)$ ,  $Q = (1, 0)$  y tal que la recta que une  $P$  y  $Q$  es la recta polar del punto  $(0, 0)$ . **(Examen final, junio 2008)**
- (f) una cónica que tiene por eje la recta  $x - 2y = 0$ , es tangente a  $x = 3$  y pasa por los puntos  $(3, 1)$  y  $(4, 1)$  **(Examen final, julio 2014)**
- (g) una cónica con vértice en el punto  $V(1, 1)$ , que pasa por el punto  $(2, 4)$  y tal que las rectas  $x + y - 2 = 0$  y  $x = 2$  son tangentes a ella.. **(Examen final, junio 2012)**
- (h) una elipse sabiendo que tiene uno de sus focos en el punto  $(-4, 2)$ , el vértice más alejado del mismo es el punto  $(2, -1)$  y la excentricidad vale  $1/2$ . **(Examen final, julio 2011)**
- (i) la parábola  $C$  tal que: la recta de ecuación  $x + y - 2 = 0$  es la tangente a  $C$  en el vértice;  $C$  pasa por el origen de coordenadas; y la recta polar del punto  $(2, 1)$  con respecto a  $C$  es paralela al eje  $OX$ .

12.— Hallar la ecuación de una hipérbola sabiendo que su centro es  $(1, 1)$ , tiene un vértice en  $(0, 0)$  y pasa por el punto  $(4, 1)$ .

**(Examen final, mayo 2022)**

---

13.— En un haz de cónicas generado por dos cónicas que no son de tipo parabólico, ¿cuál es el máximo número de parábolas que puede haber?.

**(Segundo parcial, junio 2009)**

---

14.— Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto  $(1, 0)$ , tiene un vértice en el punto  $(0, 1)$  y una asíntota paralela al eje  $OY$ .

**(Examen final, mayo 2024)**

---

**15.**— Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto  $(1, 1)$ , es tangente a la recta  $x + y - 3 = 0$  en  $(1, 2)$  y tiene una asíntota paralela al eje  $OX$ .

**(Examen final, mayo 2023)**

---

**16.**— Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto  $(1, 2)$ , es tangente a la recta  $x + y - 2 = 0$  en el punto  $(2, 0)$  y pasa por el origen.

**(Examen final, mayo 2018)**

---

**17.**— Hallar la ecuación de una elipse de centro el punto  $(1, 2)$ , un foco en  $(2, 4)$  y sabiendo además que la distancia entre los dos vértices situados sobre el eje menor es 4.

**(Examen final, julio 2018)**

---

**18.**— Hallar la ecuación de una cónica que tiene el centro en el punto  $(4, 3)$ , un foco en  $(0, 0)$  y excentricidad  $e = 5/6$ .

**(Examen final, julio 2024)**

---

**I.**– En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 3xy + y^2 + x + y = 0$$

- (i) Clasificar la cónica.
- (ii) Hallar su centro, ejes y vértices.
- (iii) Calcular su ecuación reducida y excentricidad.

**(Examen final, mayo 2016)**

---

**II.**– Para cada número  $k \in \mathbb{R}$  se define la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2kxy + y^2 - 1 = 0.$$

- (i) Clasificar la cónica en función de los valores de  $k$ .
- (ii) Cuando tenga sentido, calcular la excentricidad de la cónica en función de  $k$ .

**(Segundo parcial, junio 2010)**

---

**III.**– Se dice que una hipérbola es *equilátera* cuando sus asíntotas son perpendiculares.

- (a) Demostrar que una cónica no degenerada es una hipérbola equilátera si y sólo si es nula la traza de su matriz  $T$  de coeficientes cuadráticos, con respecto a una referencia rectangular.
  - (b) Encontrar todas las hipérbolas equiláteras que tengan la recta  $y = 2x$  por eje focal.
- 

**IV.**– Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro  $k \in \mathbb{R}$ :

$$x^2 + 8xy + ky^2 - 2x + 2ky = 0$$

- a) Clasificar las cónicas en función de  $k$ .
- b) Para  $k = 1$  hallar la distancia entre sus dos focos.
- c) Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.

**(Segundo parcial, junio 2008)**

---

**V.**– Se consideran las cónicas  $C_1$  y  $C_2$  de ecuaciones:

$$C_1 \equiv x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0$$

$$C_2 \equiv xy + y^2 - 2x + y - 8 = 0.$$

Hallar la ecuación de la cónica no degenerada que pasa por los puntos de intersección de  $C_1$  y  $C_2$  y tiene el centro sobre la recta  $x - y - 2 = 0$ .

**(Examen extraordinario, diciembre 2010)**

---

**VI.**— En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular, se pide hallar la ecuación de una elipse para la que los dos vértices que pertenecen a un eje son los puntos  $(2, 1)$  y  $(0, -1)$  y que la distancia entre sus dos focos es 4.

(Examen final, junio 2003)

---

**VII.**— En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$3x^2 + 4xy - 10x - 4y = 0$$

- (i) Clasificar la cónica.
- (ii) Hallar su centro, ejes, y asíntotas.
- (iii) Calcular su ecuación reducida y excentricidad.

(Examen final, julio 2018)

---

**VIII.**— Hallar la ecuación de una hipérbola una de cuyas asíntotas es la recta  $x + 2y - 2 = 0$ , la otra asíntota es paralela al eje  $OY$  y sabiendo que la polar del punto  $(1, 0)$  es la recta  $x + y - 3 = 0$ .

(Segundo parcial, mayo 2005)

---

**IX.**— Calcular la ecuación de una cónica de centro el punto  $(0, 1)$ , tangente a la recta  $x + y = 0$  en el punto  $(1, -1)$  y que tiene por asíntota la recta  $y = 1$ .

---

**X.**— En el plano afín euclídeo y referido a un sistema de referencia rectangular, determinar las cónicas que pasan por  $P(0, 2)$  y  $Q(0, 4)$ , tienen una asíntota paralela a la recta  $y - 4x = 0$  y cortan al eje  $OX$  en puntos  $A$  y  $B$  tales que  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 2$ .

---

**XI.**— Hallar la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto  $(3, 4)$ , un foco en  $(0, 0)$  y excentricidad  $e = 5/6$ .

---

**XII.**— Para cada número real  $a$  definimos la cónica de ecuación:

$$9x^2 + ay^2 - 6axy + 3a - 12 = 0.$$

- i) Clasificar las cónicas dependiendo de los valores de  $a$ .
  - ii) En aquellos casos en los que las cónicas sean degeneradas escribir las ecuaciones de las rectas que las forman.
- 

**XIII.**— En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, calcular la ecuación de una cónica no degenerada cuyo único eje es la recta  $y = 2x$  y es tangente a la recta  $y = 0$  en el punto  $(1, 0)$ .

---

**XIV.**— Calcular la ecuación de una elipse tangente a los ejes de coordenadas en los puntos  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  y tangente a la recta  $x + y - 2 = 0$ .

---