ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 3.1-3.2

Geometría afín. (Curso 2010–2011)

1.– En un espacio afín real de dimensión 3, se consideran dos sistemas de referencia $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $R' = \{P, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, donde

$$\begin{array}{rcl} \overline{OP} & = & \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{u}_1 & = & -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_2 & = & \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_3 & = & -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{array}$$

Se pide:

(a) Ecuaciones que permiten obtener las coordenadas cartesianas en R en función de las de R'.

(b) Ecuaciones que permiten obtener las coordenadas cartesianas en R' en función de las de R.

(c) Puntos cuyas coordenadas en R y en R' son las mismas.

(d) Resolver el mismo problema en el espacio afín ampliado.

2.– En el espacio afín euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 0, 3)$, las rectas

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0$, $Q : x + 5y - 6z - 4 = 0$.

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(a) Recta paralela a r que pasa por A.

(b) Recta que pasa por B y es paralela a P y Q.

(c) Plano paralelo a P que pasa por A.

(d) Plano que pasa por B y es paralelo a r y s.

(e) Recta perpendicular a Q y que pasa por A.

(f) Plano perpendicular a s y que pasa por B.

(g) Recta que pasa por A y es perpendicular a r y a s.

(h) Plano perpendicular a P y Q y que pasa por B.

(i) Plano que contiene a r y es perpendicular a P.

(j) Recta que pasa por A, es perpendicular a s y paralela a Q.

(k) Recta que contiene a B, es paralela a Q y corta a r.

(l) Recta que corta a r y a s y pasa por B.

(m) Recta paralela a la dirección dada por $\bar{v}(1, 1, 2)$ y que corta a las rectas r y s.

(n) Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.

(o) Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.

(p) Perpendicular común a r y s.

(q) Distancias de A a B, de A a r, de B a P y de r a s.

(r) Ángulos formados por r y s, por s y Q y por P y Q.

3.– En el espacio afín E_3 se considera el triángulo de vértices $A(3,0,0)$, $B(1,1,1)$ y $C(1,0,2)$.

(i) Hallar las ecuaciones de las mediatrices del triángulo.

(ii) Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

(iii) Hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo ABC y vértice en el origen de coordenadas.

(Examen final, junio 2010)

4.– Dar la matriz de Gram de un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ de manera que el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ sea equilátero.

(Examen final, junio 2008)

5.– Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (2,0,1),\ D = (1,1,1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD.

(Examen final, septiembre 2009)

6.– En un espacio afín sobre $\mathbb{R}^3$ en el que se ha fijado una referencia, discutir las posiciones relativas, en función de los parámetros $a,\ b \in \mathbb{R}$, de:

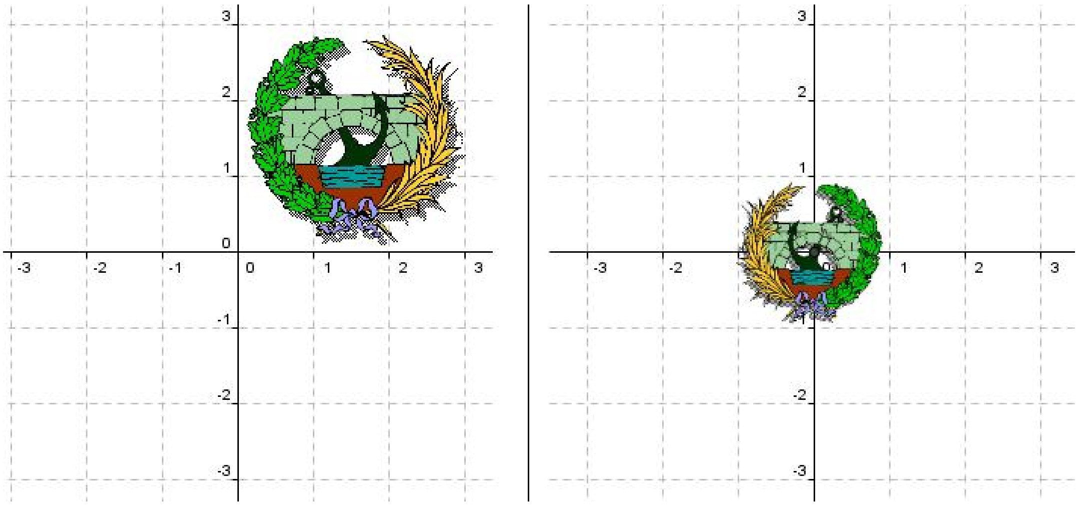
(a) los tres planos siguientes:

$$\Pi_1 : x + y + bz = 1, \qquad \Pi_2 : ax + y = 0, \qquad \Pi_3 : x + ay = a$$

(b) las dos rectas siguientes:

$$r \equiv \frac{x-a}{-3a} = y - 1 = z + 1, \qquad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{b} = z$$

7.– Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura en la otra.



(Examen final, junio 2008)

8.– En el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se considera un cubo contenido en el semiespacio superior ($E_3^+ = \{(x, y, z) \in E_3 | z \geq 0\}$). Se sabe que tres de sus vértices pertenecientes a una misma cara tienen por coordenadas:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (5, 0, 0), \quad C = (0, 3, 4)$$

Calcular la ecuación del plano donde descansa la cara opuesta a la dada.

(Examen extraordinario, diciembre 2009)

9.– En el espacio afín E_3 y con respecto a una referencia rectangular se considera un tetraedro regular de vértices A, B, C, D. Se sabe que los vértices tienen todas sus coordenadas no negativas, $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$ y que el vértice C está en el plano $z = 0$.

a) Calcular las coordenadas de los vértices C y D.

b) Calcular el ángulo que forman dos caras del tetraedro.

c) Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

c.i) ¿Existe una isometría que deje fijos dos vértices cualesquiera e intercambie los otros dos?. ¿Puede ser un giro?.

c.ii) ¿Existe una isometría que lleve los vértices A, B, C y D en B, C, D y A respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.

c.iii) ¿Existe una isometría que lleve los vértices A, B, C y D en C, D, A y B respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.

(Segundo parcial, junio 2008)

10.– En el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar usual, consideramos la recta r de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Calcular las ecuaciones de un giro de 90 grados, con semieje formado por los puntos de r con coordenada y negativa y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica.

b) Dado el plano $\pi : x + y + z = 0$ hallar la ecuación del plano transformado por el giro anterior.

c) Si hacemos girar la recta:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

sobre el eje r, indicar razonadamente que tipo de superficie se obtiene (no es necesario calcular su ecuación).

(Examen extraordinario, septiembre 2008)

11.– En el espacio afín E_3 y con respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A = (1, 2, 1), B = (2, 2, 1), C = (1, 3, 1), A' = (2, 4, 2), B' = (6, a, b), C'$.

i) Calcular a, b para que exista una homotecia que lleve el triángulo A, B, C en el triángulo A', B', C'.

ii) Hallar las ecuaciones de dicha homotecia.

iii) Hallar las coordenadas de C'.

12.– En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determinar la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s.

(Examen final, junio 2007)

13.– En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea P el punto de coordenadas $(0, 1)$. Para cada recta r pasando por el punto P, llamamos A y B a los puntos de intersección de r con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de A y B. ¿Qué tipo de curva se obtiene?.

(Examen final, junio 2008)

14.– En el espacio afín E_3, calcular el lugar geométrico de las rectas que pasan por el punto $(1, 0, 0)$ y forman un ángulo de 30 grados con el plano $2x + y + 2z - 9 = 0$.

15.– Encontrar la única respuesta correcta, en las siguientes cuestiones:

(a) Sea E espacio afín euclídeo ordinario, $\mathcal{A}$ una transformación afín en E con automorfismo asociado t; X, Y dos puntos arbitrarios de E.

○ $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(Y) + t(\overline{XY})$.

○ $d(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)) = d(X, Y)$.

○ Si $\mathcal{A}$ es una homotecia de razón $k \in (-1, 1)$, entonces $d(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)) < d(X, Y)$.

○ El vector con origen en X y extremo en Y es paralelo al de origen $\mathcal{A}(X)$ y extremo $\mathcal{A}(Y)$.

(Segundo parcial, junio 1999)

(b) En el espacio espacio afín euclídeo

○ La composición de dos homotecias siempre es una homotecia.

○ La composición de dos simetrías nunca es una simetría.

○ La composición de una simetría y de un giro nunca es una transformación ortogonal directa.

○ Cualquier giro es la composición de dos transformaciones ortogonales inversas.

(Segundo parcial, junio 2002)

(c) En el espacio afín ampliado

○ Dos rectas diferentes siempre se cortan en un punto.

○ Una recta y un plano no pueden tener más de un punto en común.

○ $(2, 1, -1, 0)$ y $(1, -2, 3, 3)$ son las coordenadas homogéneas de un punto en dos sistemas de referencia diferentes.

○ $(1, -1, 0, 1)$ y $(-2, 3, 1, 2)$ son las coordenadas homogéneas de un punto en dos sistemas de referencia diferentes.

(Segundo parcial, junio 2002)

I.– En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene un triángulo ABC de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (c,d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.

(Segundo parcial, junio 2007)

II.– En el espacio E_3 ampliado y con respecto a un sistema de referencia $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, se consideran los puntos $A(2,0,2,2)$, $B(-6,-3,0,-3)$, $C(-1,1,2)$, $D(1,0,0)$, $E(0,1,1)$ y $F(1,1,1,0)$ y el vector $\bar{v} = (-1,2,0)$. Se pide:

(a) Ecuaciones paramétricas y cartesianas del plano Π, que pasa por A, B y C.

(b) Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta r, que pasa por D y es paralela a $\bar{v}$.

(c) Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta s, que pasa por E y F.

(d) $\Pi \cap r$.

(e) $\Pi \cap s$.

III.– En el espacio E_2 dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas $r : x = 1$ y $s : y = x$. Hallar una recta que pase por $M(2,1)$ y que corta a r y a s en dos puntos distintos (respectivamente A y B), tales que M equidiste de A y B.

(Examen extraordinario, setiembre 2001)

IV.– En el plano afín y con respecto a una referencia rectangular, calcular la ecuación de un giro que lleva la recta $3x - 4y - 3 = 0$ a la recta $4x - 3y - 4 = 0$.

(Segundo Parcial, mayo 2004)

V.– En el espacio afín euclídeo y con respecto a un sistema de referencia rectangular, se consideran las rectas

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y = 0, \end{cases} \qquad s : x = y = z.$$

Encontrar un plano paralelo a r y a s y equidistante de ambas.

(Examen final, junio 2001)

VI.– En el espacio afín euclídeo ordinario se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, en el que la matriz de Gram asociada a la base del sistema es G, las rectas r y s y el plano Π.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad r : \begin{cases} x + y + z & = & -1 \\ y + z & = & 2, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x & = & \lambda \\ y & = & 2 \\ z & = & 1 + \lambda \end{cases} \qquad \Pi : x + 2y - z = 1$$

Se pide:

(a) Distancia de r a s.

(b) Plano que contiene a r y es perpendicular a Π.

(c) ángulo formado por r y s.

(d) ángulo formado por r y Π.

(e) Distancia de s a Π.

VII.– En el espacio afín euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano Π corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1,2,2)$ forman con el plano Π un ángulo de $60°$.

(Segundo parcial, junio 2003)

VIII.– Se considera el espacio afín euclídeo ordinario, dotado de un sistema de referencia rectangular y con la orientación asociada a éste. Determinar el punto que se obtiene al hacer girar $90°$ el origen de coordenadas alrededor del eje

$$\begin{cases} y & = & 1 \\ 3x - 4z & = & 3 \end{cases}$$

tomado en el sentido de las x positivas.

(Examen final, junio 2003)

IX.– En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x = y$.

(Examen final, septiembre 2006)

X.– En el espacio E_2 se consideran los puntos P y Q. Sean S_P y S_Q las simetrías en E_2 con centros P y Q, respectivamente. Demostrar que $S_Q \circ S_P$ es una traslación y encontrar el vector asociado.

(Examen final, junio 2001)

XI.– En el plano afín E_2 y con respecto al producto escalar usual encontrar la ecuación de *todas* las rectas que distan 1 unidad del origen de coordenadas y 2 unidades del punto $(4,0)$.

XII.– Se considera el espacio E_2, en el que se ha fijado un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}$. Dada la transformación $\mathcal{A}(x,y) = (x',y')$ (coordenadas en $\mathcal{R}$) por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= 3 + \frac{1}{2}(1+\lambda)x + \frac{1}{2}(1-\lambda)y \\ y' &= \mu + \frac{1}{2}(1-\lambda)x + \frac{1}{2}(1+\lambda)y, \end{aligned}$$

se pide:

(a) Determinar λ para que $\mathcal{A}$ sea una transformación afín.

(b) Determinar λ para que $\mathcal{A}$ sea una traslación. Para ese valor de λ, dar el vector asociado a la traslación.

(c) Determinar λ y μ para que $\mathcal{A}$ sea la simetría ortogonal respecto a una recta. Para esos valores de λ y μ, dar la ecuación de la recta.

(Segundo parcial, mayo 2001)

XIII.– Calcular la ecuación de una homotecia del plano que lleve la circunferencia,

$$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0,$$

en otra de ecuación,

$$x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0.$$

(Examen extraordinario, septiembre 2009)

XIV.– En el plano afín E_2 y con respecto a un sistema de referencia rectangular consideramos las rectas r, s de ecuaciones:

$$r : x = 0; \qquad s : x + y = 0.$$

Calcular la ecuación de todas las rectas t que pasan por el punto $(0, -1)$ y tales que el triángulo formado por los puntos de corte de r, s y t es isósceles.

(Segundo parcial, mayo 2005)

XV.– Se considera, en el plano afín E_2, la referencia $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ respecto a la cual el producto escalar viene dado por la matriz de Gram $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcular las ecuaciones de la simetría respecto a la recta $r \equiv x + y - 1 = 0$.

(Segundo parcial, junio 2007)

XVI.– Calcular las ecuaciones de una transformación afín que lleve el cuadrado de vértices $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ en el cuadrado de vértices $(1,1), (3,1), (3,3), (1,3)$.

(Examen extraordinario, diciembre 2006)
