

1.— En el espacio afín  $\mathbb{R}^3$  se considera la referencia canónica  $R$  y la referencia

$$R' = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}.$$

Denotamos respectivamente por  $(x, y, z)$  y  $(x', y', z')$  a las coordenadas de un punto respecto a la referencias  $R$  y  $R'$ . Hallar las ecuaciones del plano  $x + y - 2z + 1 = 0$  en la referencia  $R'$ .

(Examen final, julio 2014)

---

2.— En el espacio afín euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos  $A(2, -1, 1)$ ,  $B(-1, 0, 3)$ , las rectas

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos  $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0$ ,  $Q : x + 5y - 6z - 4 = 0$ .

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

- (a) Recta paralela a  $r$  que pasa por  $A$ .
  - (b) Recta que pasa por  $B$  y es paralela a  $P$  y  $Q$ .
  - (c) Plano paralelo a  $P$  que pasa por  $A$ .
  - (d) Plano que pasa por  $B$  y es paralelo a  $r$  y  $s$ .
  - (e) Recta perpendicular a  $Q$  y que pasa por  $A$ .
  - (f) Plano perpendicular a  $s$  y que pasa por  $B$ .
  - (g) Recta que pasa por  $A$  y es perpendicular a  $r$  y a  $s$ .
  - (h) Plano perpendicular a  $P$  y  $Q$  y que pasa por  $B$ .
  - (i) Plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $P$ .
  - (j) Recta que pasa por  $A$ , es perpendicular a  $s$  y paralela a  $Q$ .
  - (k) Recta que contiene a  $B$ , es paralela a  $Q$  y corta a  $r$ .
  - (l) Recta que corta a  $r$  y a  $s$  y pasa por  $B$ .
  - (m) Recta paralela a la dirección dada por  $\vec{v}(1, 1, 2)$  y que corta a las rectas  $r$  y  $s$ .
  - (n) Recta que pasa por  $A$ , corta a  $s$  y es perpendicular a  $r$ .
  - (o) Plano perpendicular a  $P$ , paralelo a  $r$  y que pasa por  $A$ .
  - (p) Perpendicular común a  $r$  y  $s$ .
  - (q) Distancias de  $A$  a  $B$ , de  $A$  a  $r$ , de  $B$  a  $P$  y de  $r$  a  $s$ .
  - (r) Ángulos formados por  $r$  y  $s$ , por  $s$  y  $Q$  y por  $P$  y  $Q$ .
-

- 3.— En el espacio afín dar la ecuación de una recta pasando por el punto  $P = (1, 0, 1)$  y que corta perpendicularmente a la recta:

$$s \equiv \begin{cases} y + z = 4 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Hallar también la distancia entre  $P$  y  $s$ .

**(Examen final, julio 2018)**

---

- 4.— En el espacio afín euclideo con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se tienen los puntos:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (2, 2, 2).$$

- (i) Hallar las coordenadas de un punto  $C$  en el plano  $x + z = 0$ , para que el triángulo  $ABC$  sea equilátero.
- (ii) Calcular el área del triángulo  $ABC$ .
- (iii) Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el punto  $A$  en el punto  $B$  y cuadriplique el área del triángulo.

**(Examen final, julio 2014)**

---

- 5.— En el espacio afín  $\mathbb{R}^3$  se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la distancia entre el punto  $(-4, 1, 0)$  y la recta  $r$  de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

**(Examen final, mayo 2018)**

---

- 6.— En el espacio afín calcular las ecuaciones de un giro de  $90^\circ$  respecto a la semirrecta de ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(3, 0, 4), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

**(Examen final, mayo 2016)**

---

- 7.— En el espacio afín calcular las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que transforme el punto  $(2, 1, 0)$  en  $(0, 1, 2)$ .

**(Examen final, julio 2018)**

---

- 8.— En el plano afín euclideo hallar las ecuaciones de una simetría que lleva la recta  $x = 0$  en la recta  $3x + 4y - 4 = 0$ . ¿Es única la solución?

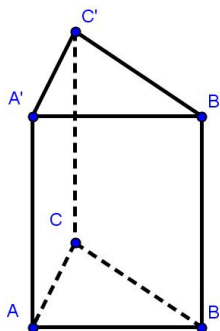
**(Examen final, mayo 2018)**

---

9.— En el espacio afín se considera el prisma recto triangular de vértices  $ABCA'B'C'$ . Se sabe que:

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (2, 0, 1), \quad \text{Volumen} = 2,$$

y que el plano  $x = 0$  no corta al prisma.



- (i) Calcular el área del prisma.
- (ii) Calcular las coordenadas de los vértices  $A', B', C'$ . ¿Son únicas?
- (iii) Decidir razonadamanete si existe un giro que lleve los vértices  $A, B, C$  respectivamente en  $B, C, A$ . En caso afirmativo hallar el eje de giro.

(Examen final, mayo 2013)

---

10.— Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el triángulo  $ABC$  en  $A'B'C'$  sabiendo que:

$$A = (1, 1), \quad B = (3, 2), \quad C = (2, 4), \quad A' = (2, 3), \quad \text{superficie}(A'B'C') = 10.$$

(Examen final, mayo 2012)

---

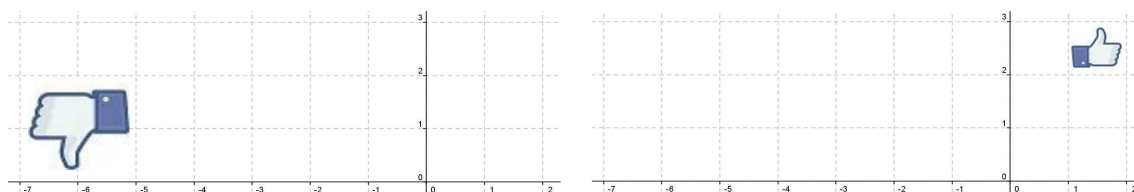
11.— En el espacio afín consideramos una pirámide regular de base cuadrada. Denotamos por  $A, B, C, D$  a los cuatro vértices de la base y por  $E$  al vértice superior. Sabiendo que la base está contenida en el plano  $z = 0$ , que  $A = (0, 0, 0)$  y  $C = (4, 2, 0)$  son vértices opuestos de la base y que la altura del pirámide es 5 calcular:

- (i) Las coordenadas de los tres vértices restantes.
- (ii) El volumen de la pirámide.

(Examen final, mayo 2017)

---

12.— Dar la ecuación de una homotecia que transforme una figura en otra:



(Examen final, julio 2011)

---

- 13.**— En el plano afín sean los puntos  $A(-1, 0)$  y  $P(1, 0)$ . Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos  $B$  del plano tales que  $AB$  sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es  $P$ . ¿Qué tipo de curva es?.

**(Examen final, mayo 2015)**

---

- 14.**— En el plano afín se considera la circunferencia  $c : (x - 3)^2 + y^2 = 3^2$  y la recta  $r : y - 3 = 0$ . Para cada recta  $h$  pasando por el origen, sea  $A$  el punto de intersección (distinto del origen) de  $c$  y  $h$  y  $B$  el punto de intersección de  $r$  y  $h$ . Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos de intersección de la paralela al eje  $OX$  por  $A$  y la paralela al eje  $OY$  por  $B$ .

**(Examen final, julio 2017)**

---

- 15.**— En el plano afín se sean las rectas  $r \equiv y - 1 = 0$  y  $s \equiv x - y = 0$ . Para cada punto  $P$  de  $s$  se traza una recta  $l$  perpendicular a  $s$  pasando por  $P$ . Sea  $Q$  el punto de corte de  $r$  y  $l$ .

(i) Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos medios de  $P$  y  $Q$ .

(ii) Hallar el ángulo que forman las rectas  $r$  y  $s$ . **(Examen final, mayo 2014)**

---

- 16.**— En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos  $A = (1, 0, 0)$  y  $B = (1, 2, 2)$ .

(i) Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de  $A$  y  $B$ .

(ii) Hallar las coordenadas de un punto  $C$  en el plano  $z = 2$ , de manera que el triángulo  $ABC$  sea isósceles con  $AB$  el lado desigual y tenga área  $2\sqrt{3}$ . ¿Es única la solución?.

**(Examen final, junio 2013)**

---

**I.**— En el plano afín  $E_2$  y con respecto a una referencia rectangular se tiene un triángulo  $ABC$  de vértices  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (c, d)$ . Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.

**(Segundo parcial, junio 2007)**

---

**II.**— Consideramos el espacio afín euclídeo  $E_3$  con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0), C = (2, 0, 1), D = (1, 1, 1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice  $A$  sobre la base opuesta  $BCD$ .

**(Examen final, septiembre 2009)**

---

**III.**— En el espacio  $E_2$  dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas  $r : x = 1$  y  $s : y = x$ . Hallar una recta que pase por  $M(2, 1)$  y que corta a  $r$  y a  $s$  en dos puntos distintos (respectivamente  $A$  y  $B$ ), tales que  $M$  equidiste de  $A$  y  $B$ .

**(Examen extraordinario, setiembre 2001)**

---

**IV.**— En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular  $ABCD$  de la cual sabemos:

-  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 0, 0)$ ,  $C = (0, 1, 1)$ .

- El vértice  $D$  se encuentra en un plano paralelo a la base  $ABC$  y que pasa por el punto  $P = (0, 10, 9)$ .

- El vértice  $D$  equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

(ii) Hallar las coordenadas del vértice  $D$ .

(iii) Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano  $ABC$ .

(iv) Hallar el simétrico de  $P$  respecto de la simetría anterior.

**(Examen final, mayo 2011)**

---

**V.**— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro con centro el punto  $(1, 2)$  y ángulo  $\pi/2$ . Calcular la ecuación de la recta que se obtiene al aplicar el giro a la recta  $x - 2y + 1 = 0$ .

**(Examen final, junio 2008)**

---

**VI.**— En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ z = 5 \end{cases}, \quad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(0, 1, 2).$$

Calcular la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ .

**(Examen final, julio 2015)**

---

**VII.**— En el espacio afín euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano  $\Pi$  corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto  $P(1, 2, 2)$  forman con el plano  $\Pi$  un ángulo de  $60^\circ$ .

**(Segundo parcial, junio 2003)**

---

**VIII.**— En el espacio afín sean los puntos  $A(1, 1, 0)$  y  $B(0, 1, 1)$ .

- Calcular las coordenadas de un tercer punto  $C$  en el plano de ecuación  $x + z = 2$  de manera que el triángulo  $ABC$  sea equilátero. ¿Es única la solución?
- Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.

**(Examen final, julio 2017)**

---

**IX.**— En el plano afín euclídeo  $E_2$  y con respecto a una referencia rectangular, sea  $C$  la elipse de ecuación  $x^2 + 2y^2 = 4$ . Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de  $C$  paralelas a la recta  $x = y$ .

**(Examen final, septiembre 2006)**

---

**X.**— En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea  $P$  el punto de coordenadas  $(0, 1)$ . Para cada recta  $r$  pasando por el punto  $P$ , llamamos  $A$  y  $B$  a los puntos de intersección de  $r$  con la curva  $y = x^2$ . Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de  $A$  y  $B$ . ¿Qué tipo de curva se obtiene?

**(Examen final, junio 2008)**

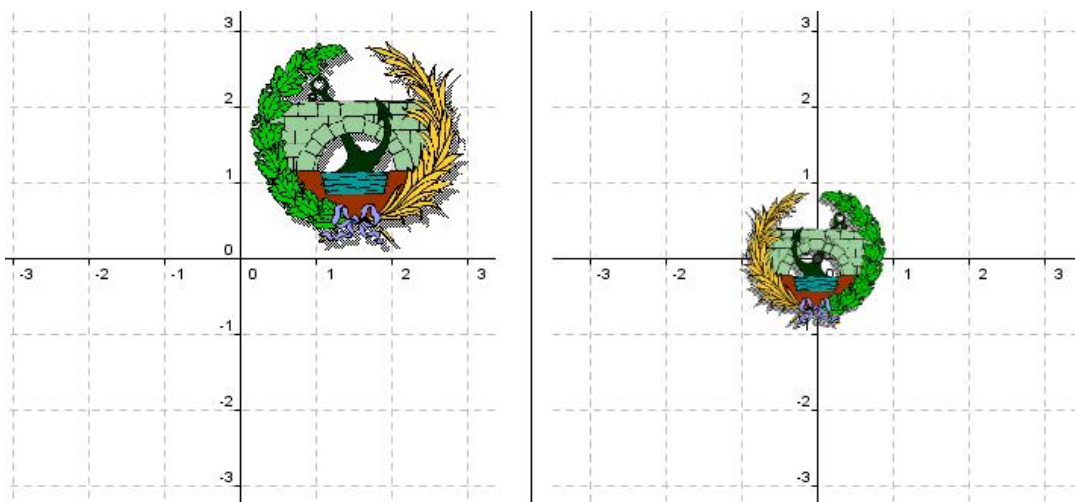
---

**XI.**— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta  $3x - 4y = 0$  en la recta  $y + 3 = 0$  y esté centrado en un punto de la recta  $y = 0$ .

**(Examen final, mayo 2014)**

---

**XII.**— Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura en la otra.



(Examen final, junio 2008)

---

**XIII.**— Supongamos que escogemos 2011 puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?

(Examen final, julio 2011)

---

**XIV.**— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos  $A = (-1, 4)$  y  $B = (1, 5)$  respectivamente en  $A' = (3, 4)$  y  $B' = (5, 3)$ . Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

(Examen final, mayo 2013)

---

**XV.**— En el espacio  $E_3$  se considera un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  del que se sabe que la base  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$  es ortonormal. Con respecto a  $\mathcal{R}$  se tienen las ecuaciones de las rectas  $r$  y  $s$ :

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determinar la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a  $r$  y  $s$  y son perpendiculares a  $s$ .

(Examen final, junio 2007)

---