ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 3.1-3.2

Geometría afín. (Curso 2016–2017)

1.– En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera la referencia canónica R y la referencia

$$R' = \{(1,0,1); (1,1,0), (1,1,1), (1,0,0)\}.$$

Denotamos respectivamente por (x, y, z) y (x', y', z') a las coordenadas de un punto respecto a la referencias R y R'. Hallar las ecuaciones del plano $x + y - 2z + 1 = 0$ en la referencia R'.

(Examen final, julio 2014)

2.– En el espacio afín euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 0, 3)$, las rectas

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0$, $Q : x + 5y - 6z - 4 = 0$.

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(a) Recta paralela a r que pasa por A.

(b) Recta que pasa por B y es paralela a P y Q.

(c) Plano paralelo a P que pasa por A.

(d) Plano que pasa por B y es paralelo a r y s.

(e) Recta perpendicular a Q y que pasa por A.

(f) Plano perpendicular a s y que pasa por B.

(g) Recta que pasa por A y es perpendicular a r y a s.

(h) Plano perpendicular a P y Q y que pasa por B.

(i) Plano que contiene a r y es perpendicular a P.

(j) Recta que pasa por A, es perpendicular a s y paralela a Q.

(k) Recta que contiene a B, es paralela a Q y corta a r.

(l) Recta que corta a r y a s y pasa por B.

(m) Recta paralela a la dirección dada por $\bar{v}(1, 1, 2)$ y que corta a las rectas r y s.

(n) Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.

(o) Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.

(p) Perpendicular común a r y s.

(q) Distancias de A a B, de A a r, de B a P y de r a s.

(r) Ángulos formados por r y s, por s y Q y por P y Q.

3.– En el espacio afín se considera la recta r de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ \ \ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

y el punto $P = (3, 1, 1)$.

(i) Calcular la ecuación implícita de todos los planos perpendiculares a r y que distan 1 unidad del punto P.

(ii) Calcular la ecuación paramétrica de una recta que corte perpendicularmente a r y pasando por P.

(iii) Calcular las ecuaciones cartesianas de la recta simétrica de r respecto al punto P.

(Examen final, mayo 2016)

4.– En el espacio afín euclideo con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se tienen los puntos:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (2, 2, 2).$$

(i) Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $x + z = 0$, para que el triángulo ABC sea equilátero.

(ii) Calcular el área del triángulo ABC.

(iii) Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el punto A en el punto B y cuadriplique el área del triángulo.

(Examen final, julio 2014)

5.– En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ \qquad\quad z = 5 \end{cases}, \qquad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(0, 1, 2).$$

Calcular la distancia entre las rectas r y s.

(Examen final, julio 2015)

6.– En el espacio afín calcular las ecuaciones de un giro de 90^o respecto a la semirrecta de ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(3, 0, 4), \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0.$$

(Examen final, mayo 2016)

7.– En el espacio afín hallar las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto $(1, -1, 1)$ en $(1, 1, 3)$.

(Examen final, julio 2016)

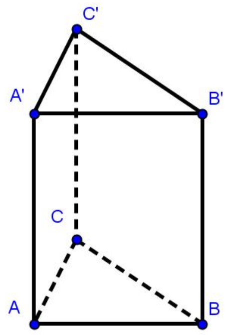
8.– En el plano afín hallar las ecuaciones y ángulo de un giro con centro en el punto $(1, 1)$ y que lleve la recta $x + 2y - 1 = 0$ en la recta $x - 2y - 1 = 0$.

(Examen final, julio 2015)

9.– En el espacio afín se considera el prisma recto triangular de vértices $ABCA'B'C'$. Se sabe que:

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (2, 0, 1), \quad Volumen = 2,$$

y que el plano $x = 0$ no corta al prisma.



(i) Calcular el área del prisma.

(ii) Calcular las coordenadas de los vértices A', B', C'. ¿Son únicas?.

(iii) Decidir razonadamanete si existe un giro que lleve los vértices A, B, C respectivamente en B, C, A. En caso afirmativo hallar el eje de giro.

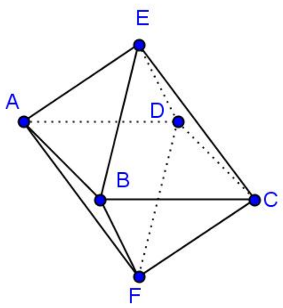
(Examen final, mayo 2013)

10.– Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el triángulo ABC en $A'B'C'$ sabiendo que:

$$A = (1, 1), \quad B = (3, 2), \quad C = (2, 4), \quad A' = (2, 3), \quad superficie(A'B'C') = 10.$$

(Examen final, mayo 2012)

11.– En el espacio afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ y $D = (1, 0, -1)$.



(i) Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.

(ii) Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.

(iii) Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto medio de las aristas AE, BE y CF.

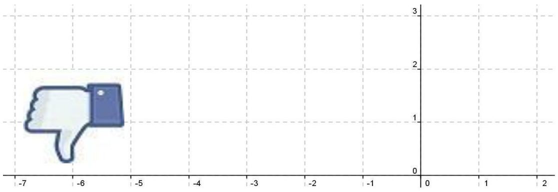
(iv) Probar que el plano π pasa por el punto medio de las aristas AD, BC y DF.

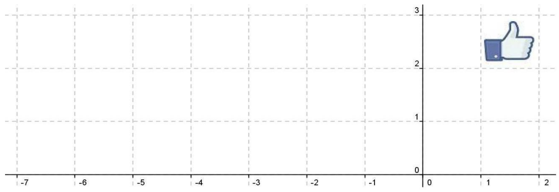
(v) Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.

(vi) Calcular la proyección ortogonal del punto E sobre el plano que contiene a los vértices DCF.

(Examen final, julio 2012)

12.– Dar la ecuación de una homotecia que transforme una figura en otra:





(Examen final, julio 2011)

13.– En el plano afín sean los puntos $A(-1,0)$ y $P(1,0)$. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos B del plano tales que AB sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es P. ¿Qué tipo de curva es?.

(Examen final, mayo 2015)

14.– En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea P el punto de coordenadas $(0,1)$. Para cada recta r pasando por el punto P, llamamos A y B a los puntos de intersección de r con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de A y B. ¿Qué tipo de curva se obtiene?.

(Examen final, junio 2008)

15.– En el plano afín se sean las rectas $r \equiv y - 1 = 0$ y $s \equiv x - y = 0$. Para cada punto P de s se traza una recta l perpendicular a s pasando por P. Sea Q el punto de corte de r y l.

(i) Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos medios de P y Q.

(ii) Hallar el ángulo que forman las rectas r y s. **(Examen final, mayo 2014)**

16.– En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A = (1,0,0)$ y $B = (1,2,2)$.

(i) Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de A y B.

(ii) Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $z = 2$, de manera que el triángulo ABC sea isósceles con AB el lado desigual y tenga área $2\sqrt{3}$. ¿Es única la solución?.

(Examen final, junio 2013)

I.– En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene un triángulo ABC de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (c, d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.

(Segundo parcial, junio 2007)

II.– Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0, 0, 0),\ B = (1, 0, 0),\ C = (2, 0, 1),\ D = (1, 1, 1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD.

(Examen final, septiembre 2009)

III.– En el espacio E_2 dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas $r : x = 1$ y $s : y = x$. Hallar una recta que pase por $M(2, 1)$ y que corta a r y a s en dos puntos distintos (respectivamente A y B), tales que M equidiste de A y B.

(Examen extraordinario, setiembre 2001)

IV.– En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:

- $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 1)$.

- El vértice D se encuentra en un plano paralelo a la base ABC y que pasa por el punto $P = (0, 10, 9)$.

- El vértice D equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

(ii) Hallar las coordenadas del vértice D.

(iii) Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano ABC.

(iv) Hallar el simétrico de P respecto de la simetría anterior.

(Examen final, mayo 2011)

V.– Dar la matriz de Gram de un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ de manera que el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ sea equilátero.

(Examen final, junio 2008)

VI.– En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & a \\ 1 & b & c \end{pmatrix}.$$

Sean los puntos $A = (1, 2, 0)$, $B = (1, 3, 1)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}, \qquad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(0, 1, 2).$$

Hallar a, b, c sabiendo que $d(A, B) = 3$ y que las rectas r y s son perpendiculares.

(Examen final, junio 2013)

VII.– En el espacio afín euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano Π corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1, 2, 2)$ forman con el plano Π un ángulo de $60°$.

(Segundo parcial, junio 2003)

VIII.– En el espacio afín sean los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 1, 1)$.

a) Calcular las coordenadas de un tercer punto C en el plano de ecuación $x + z = 2$ de manera que el triángulo ABC sea equilátero. ¿Es única la solución?.

b) Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.

(Examen final, julio 2017)

IX.– En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x = y$.

(Examen final, septiembre 2006)

X.– En el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se considera un cubo contenido en el semiespacio superior ($E_3^+ = \{(x, y, z) \in E_3 | z \geq 0\}$). Se sabe que tres de sus vértices pertenecientes a una misma cara tienen por coordenadas:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (5, 0, 0), \quad C = (0, 3, 4)$$

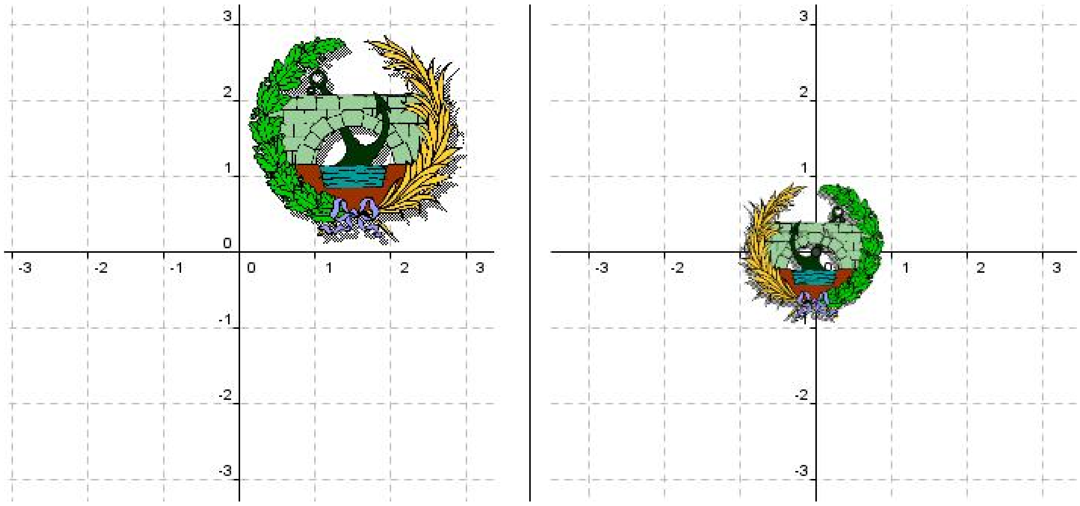
Calcular la ecuación del plano donde descansa la cara opuesta a la dada.

(Examen extraordinario, diciembre 2009)

XI.– En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta $3x - 4y = 0$ en la recta $y + 3 = 0$ y esté centrado en un punto de la recta $y = 0$.

(Examen final, mayo 2014)

XII.– Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura en la otra.



(Examen final, junio 2008)

XIII.– Supongamos que escogemos 2011 puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?

(Examen final, julio 2011)

XIV.– En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos $A = (-1, 4)$ y $B = (1, 5)$ respectivamente en $A' = (3, 4)$ y $B' = (5, 3)$. Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

(Examen final, mayo 2013)

XV.– En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determinar la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s.

(Examen final, junio 2007)
