

1.— En el espacio afín  $\mathbb{R}^3$  se considera la referencia canónica  $R$  y la referencia

$$R' = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}.$$

Denotamos respectivamente por  $(x, y, z)$  y  $(x', y', z')$  a las coordenadas de un punto respecto a la referencias  $R$  y  $R'$ . Hallar las ecuaciones del plano  $x + y - 2z + 1 = 0$  en la referencia  $R'$ .

(Examen final, julio 2014)

---

2.— En el espacio afín euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos  $A(2, -1, 1)$ ,  $B(-1, 0, 3)$ , las rectas

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos  $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0$ ,  $Q : x + 5y - 6z - 4 = 0$ .

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

- (a) Recta paralela a  $r$  que pasa por  $A$ .
  - (b) Recta que pasa por  $B$  y es paralela a  $P$  y  $Q$ .
  - (c) Plano paralelo a  $P$  que pasa por  $A$ .
  - (d) Plano que pasa por  $B$  y es paralelo a  $r$  y  $s$ .
  - (e) Recta perpendicular a  $Q$  y que pasa por  $A$ .
  - (f) Plano perpendicular a  $s$  y que pasa por  $B$ .
  - (g) Recta que pasa por  $A$  y es perpendicular a  $r$  y a  $s$ .
  - (h) Plano perpendicular a  $P$  y  $Q$  y que pasa por  $B$ .
  - (i) Plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $P$ .
  - (j) Recta que pasa por  $A$ , es perpendicular a  $s$  y paralela a  $Q$ .
  - (k) Recta que contiene a  $B$ , es paralela a  $Q$  y corta a  $r$ .
  - (l) Recta que corta a  $r$  y a  $s$  y pasa por  $B$ .
  - (m) Recta paralela a la dirección dada por  $\bar{v}(1, 1, 2)$  y que corta a las rectas  $r$  y  $s$ .
  - (n) Recta que pasa por  $A$ , corta a  $s$  y es perpendicular a  $r$ .
  - (o) Plano perpendicular a  $P$ , paralelo a  $r$  y que pasa por  $A$ .
  - (p) Perpendicular común a  $r$  y  $s$ .
  - (q) Distancias de  $A$  a  $B$ , de  $A$  a  $r$ , de  $B$  a  $P$  y de  $r$  a  $s$ .
  - (r) Ángulos formados por  $r$  y  $s$ , por  $s$  y  $Q$  y por  $P$  y  $Q$ .
-

3.— En el espacio afín  $E_3$  se considera el triángulo de vértices  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 1)$  y  $C(1, 0, 2)$ .

- (i) Hallar las ecuaciones de las mediatrices del triángulo.
- (ii) Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.
- (iii) Hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo  $ABC$  y vértice en el origen de coordenadas.

**(Examen final, junio 2010)**

---

4.— En el espacio afín euclideo con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se tienen los puntos:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (2, 2, 2).$$

- (i) Hallar las coordenadas de un punto  $C$  en el plano  $x + z = 0$ , para que el triángulo  $ABC$  sea equilátero.
- (ii) Calcular el área del triángulo  $ABC$ .
- (iii) Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el punto  $A$  en el punto  $B$  y cuadruple el área del triángulo.

**(Examen final, julio 2014)**

---

5.— En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ z = 5 \end{cases}, \quad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(0, 1, 2).$$

Calcular la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ .

**(Examen final, julio 2015)**

---

6.— En el plano afín hallar las ecuaciones y ángulo de un giro con centro en el punto  $(1, 1)$  y que lleve la recta  $x + 2y - 1 = 0$  en la recta  $x - 2y - 1 = 0$ .

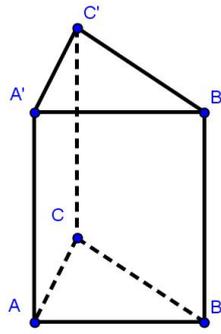
**(Examen final, julio 2015)**

---

7.— En el espacio afín se considera el prisma recto triangular de vértices  $ABCA'B'C'$ . Se sabe que:

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (2, 0, 1), \quad \text{Volumen} = 2,$$

y que el plano  $x = 0$  no corta al prisma.



- (i) Calcular el área del prisma.
- (ii) Calcular las coordenadas de los vértices  $A', B', C'$ . ¿Son únicas?.
- (iii) Decidir razonadamanete si existe un giro que lleve los vértices  $A, B, C$  respectivamente en  $B, C, A$ . En caso afirmativo hallar el eje de giro.

**(Examen final, mayo 2013)**

---

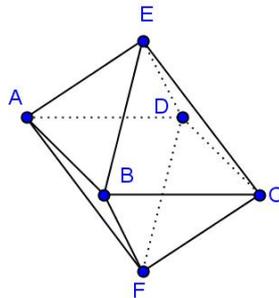
8.— Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el triángulo  $ABC$  en  $A'B'C'$  sabiendo que:

$$A = (1, 1), \quad B = (3, 2), \quad C = (2, 4), \quad A' = (2, 3), \quad \text{superficie}(A'B'C') = 10.$$

**(Examen final, mayo 2012)**

---

9.— En el espacio afín  $E_3$  se considera un octaedro regular de vértices  $ABCDEF$  con  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 0, 1)$  y  $D = (1, 0, -1)$ .

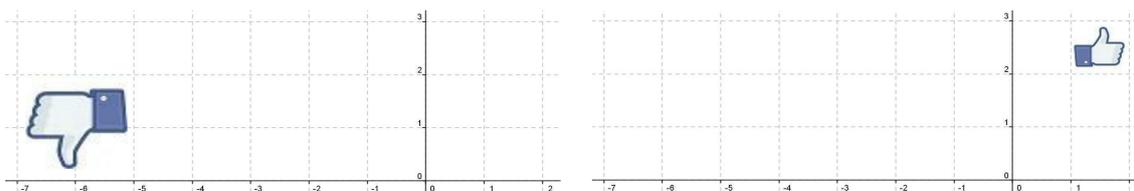


- (i) Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.
- (ii) Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.
- (iii) Hallar la ecuación del plano  $\pi$  que contiene al punto medio de las aristas  $AE, BE$  y  $CF$ .
- (iv) Probar que el plano  $\pi$  pasa por el punto medio de las aristas  $AD, BC$  y  $DF$ .
- (v) Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.
- (vi) Calcular la proyección ortogonal del punto  $E$  sobre el plano que contiene a los vértices  $DCF$ .

**(Examen final, julio 2012)**

---

10.— Dar la ecuación de una homotecia que transforme una figura en otra:



(Examen final, julio 2011)

---

11.— En el plano afín sean los puntos  $A(-1, 0)$  y  $P(1, 0)$ . Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos  $B$  del plano tales que  $AB$  sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es  $P$ . ¿Qué tipo de curva es?.

(Examen final, mayo 2015)

---

12.— En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea  $P$  el punto de coordenadas  $(0, 1)$ . Para cada recta  $r$  pasando por el punto  $P$ , llamamos  $A$  y  $B$  a los puntos de intersección de  $r$  con la curva  $y = x^2$ . Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de  $A$  y  $B$ . ¿Qué tipo de curva se obtiene?.

(Examen final, junio 2008)

---

13.— En el plano afín se sean las rectas  $r \equiv y - 1 = 0$  y  $s \equiv x - y = 0$ . Para cada punto  $P$  de  $s$  se traza una recta  $l$  perpendicular a  $s$  pasando por  $P$ . Sea  $Q$  el punto de corte de  $r$  y  $l$ .

- (i) Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos medios de  $P$  y  $Q$ .
  - (ii) Hallar el ángulo que forman las rectas  $r$  y  $s$ . (Examen final, mayo 2014)
- 

14.— En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos  $A = (1, 0, 0)$  y  $B = (1, 2, 2)$ .

- (i) Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de  $A$  y  $B$ .
- (ii) Hallar las coordenadas de un punto  $C$  en el plano  $z = 2$ , de manera que el triángulo  $ABC$  sea isósceles con  $AB$  el lado desigual y tenga área  $2\sqrt{3}$ . ¿Es única la solución?.

(Examen final, junio 2013)

---

**I.**— En el plano afín  $E_2$  y con respecto a una referencia rectangular se tiene un triángulo  $ABC$  de vértices  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (c, d)$ . Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.

**(Segundo parcial, junio 2007)**

---

**II.**— Consideramos el espacio afín euclídeo  $E_3$  con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0), C = (2, 0, 1), D = (1, 1, 1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice  $A$  sobre la base opuesta  $BCD$ .

**(Examen final, septiembre 2009)**

---

**III.**— En el espacio  $E_2$  dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas  $r : x = 1$  y  $s : y = x$ . Hallar una recta que pase por  $M(2, 1)$  y que corta a  $r$  y a  $s$  en dos puntos distintos (respectivamente  $A$  y  $B$ ), tales que  $M$  equidiste de  $A$  y  $B$ .

**(Examen extraordinario, setiembre 2001)**

---

**IV.**— En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular  $ABCD$  de la cual sabemos:

-  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 0, 0)$ ,  $C = (0, 1, 1)$ .

- El vértice  $D$  se encuentra en un plano paralelo a la base  $ABC$  y que pasa por el punto  $P = (0, 10, 9)$ .

- El vértice  $D$  equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

(ii) Hallar las coordenadas del vértice  $D$ .

(iii) Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano  $ABC$ .

(iv) Hallar el simétrico de  $P$  respecto de la simetría anterior.

**(Examen final, mayo 2011)**

---

**V.**— Dar la matriz de Gram de un producto escalar en  $\mathbb{R}^2$  de manera que el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  sea equilátero.

**(Examen final, junio 2008)**

---

**VI.**— En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & a \\ 1 & b & c \end{pmatrix}.$$

Sean los puntos  $A = (1, 2, 0)$ ,  $B = (1, 3, 1)$  y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}, \quad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(0, 1, 2).$$

Hallar  $a, b, c$  sabiendo que  $d(A, B) = 3$  y que las rectas  $r$  y  $s$  son perpendiculares.

**(Examen final, junio 2013)**

---

**VII.**— En el espacio afín euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano  $\Pi$  corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto  $P(1, 2, 2)$  forman con el plano  $\Pi$  un ángulo de  $60^\circ$ .

**(Segundo parcial, junio 2003)**

---

**VIII.**— En el espacio afín  $E_3$  con el producto escalar usual, consideramos las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 0 = z - 1 \\ 0 = y \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y + z - 2 \end{cases}$$

- (i) Hallar la ecuación de una recta que pase por  $P(1, 1, -1)$  y corte a  $r$  y  $s$ .
- (ii) Hallar la ecuación de un plano paralelo a  $r$  y  $s$  y que equidiste de ambas.

**(Examen final, julio 2011)**

---

**IX.**— En el plano afín euclídeo  $E_2$  y con respecto a una referencia rectangular, sea  $C$  la elipse de ecuación  $x^2 + 2y^2 = 4$ . Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de  $C$  paralelas a la recta  $x = y$ .

**(Examen final, septiembre 2006)**

---

**X.**— En el espacio afín euclídeo  $E_3$  con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se considera un cubo contenido en el semiespacio superior ( $E_3^+ = \{(x, y, z) \in E_3 | z \geq 0\}$ ). Se sabe que tres de sus vértices pertenecientes a una misma cara tienen por coordenadas:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (5, 0, 0), \quad C = (0, 3, 4)$$

Calcular la ecuación del plano donde descansa la cara opuesta a la dada.

**(Examen extraordinario, diciembre 2009)**

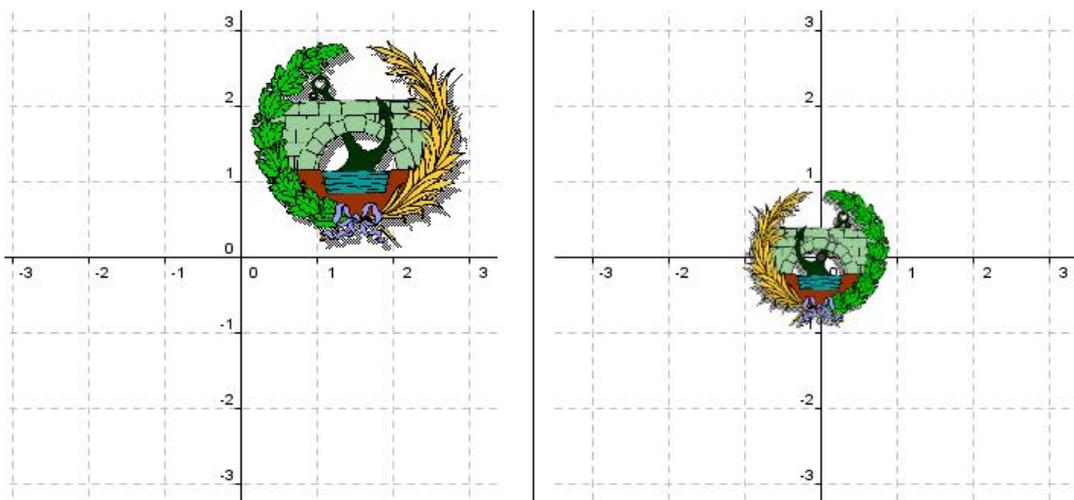
---

**XI.**— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta  $3x - 4y = 0$  en la recta  $y + 3 = 0$  y esté centrado en un punto de la recta  $y = 0$ .

**(Examen final, mayo 2014)**

---

**XII.**— Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura en la otra.



(Examen final, junio 2008)

---

**XIII.**— Supongamos que escogemos 2011 puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?

(Examen final, julio 2011)

---

**XIV.**— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos  $A = (-1, 4)$  y  $B = (1, 5)$  respectivamente en  $A' = (3, 4)$  y  $B' = (5, 3)$ . Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

(Examen final, mayo 2013)

---

**XV.**— En el espacio  $E_3$  se considera un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  del que se sabe que la base  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$  es ortonormal. Con respecto a  $\mathcal{R}$  se tienen las ecuaciones de las rectas  $r$  y  $s$ :

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determinar la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a  $r$  y  $s$  y son perpendiculares a  $s$ .

(Examen final, junio 2007)

---