## ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 3.1-3.2

**Geometría afín.** (Curso 2012–2013)

**1.–** En un espacio afín real de dimensión 3, se consideran dos sistemas de referencia $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $R' = \{P, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, donde

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{u}_1 &= -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_2 &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_3 &= -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{aligned}$$

Se pide:

(a) Ecuaciones que permiten obtener las coordenadas cartesianas en $R$ en función de las de $R'$.

(b) Ecuaciones que permiten obtener las coordenadas cartesianas en $R'$ en función de las de $R$.

---

**2.–** En el espacio afín euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos $A(2,-1,1)$, $B(-1,0,3)$, las rectas

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $\quad P: 3x - 2y + 4z + 8 = 0, \quad Q: x + 5y - 6z - 4 = 0.$

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(a) Recta paralela a $r$ que pasa por $A$.

(b) Recta que pasa por $B$ y es paralela a $P$ y $Q$.

(c) Plano paralelo a $P$ que pasa por $A$.

(d) Plano que pasa por $B$ y es paralelo a $r$ y $s$.

(e) Recta perpendicular a $Q$ y que pasa por $A$.

(f) Plano perpendicular a $s$ y que pasa por $B$.

(g) Recta que pasa por $A$ y es perpendicular a $r$ y a $s$.

(h) Plano perpendicular a $P$ y $Q$ y que pasa por $B$.

(i) Plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $P$.

(j) Recta que pasa por $A$, es perpendicular a $s$ y paralela a $Q$.

(k) Recta que contiene a $B$, es paralela a $Q$ y corta a $r$.

(l) Recta que corta a $r$ y a $s$ y pasa por $B$.

(m) Recta paralela a la dirección dada por $\bar{v}(1,1,2)$ y que corta a las rectas $r$ y $s$.

(n) Recta que pasa por $A$, corta a $s$ y es perpendicular a $r$.

(o) Plano perpendicular a $P$, paralelo a $r$ y que pasa por $A$.

(p) Perpendicular común a $r$ y $s$.

(q) Distancias de $A$ a $B$, de $A$ a $r$, de $B$ a $P$ y de $r$ a $s$.

(r) Ángulos formados por $r$ y $s$, por $s$ y $Q$ y por $P$ y $Q$.

---

**3.–** En el espacio afín $E_3$ se considera el triángulo de vértices $A(3,0,0)$, $B(1,1,1)$ y $C(1,0,2)$.

(i) Hallar las ecuaciones de las mediatrices del triángulo.

(ii) Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

(iii) Hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo $ABC$ y vértice en el origen de coordenadas.

**(Examen final, junio 2010)**

---

**4.–** Dar la matriz de Gram de un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ de manera que el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ sea equilátero.

**(Examen final, junio 2008)**

---

**5.–** Sea la matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Probar que $G$ es la matriz de Gram un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica.

(ii) En el espacio afín euclídeo con el producto escalar anterior calcular la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

**(Examen final, mayo 2011)**

---

**6.–** En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:

- $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,1)$.

- El vértice $D$ se encuentra en un plano paralelo a la base $ABC$ y que pasa por el punto $P = (0,10,9)$.

- El vértice $D$ equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

(ii) Hallar las coordenadas del vértice $D$.

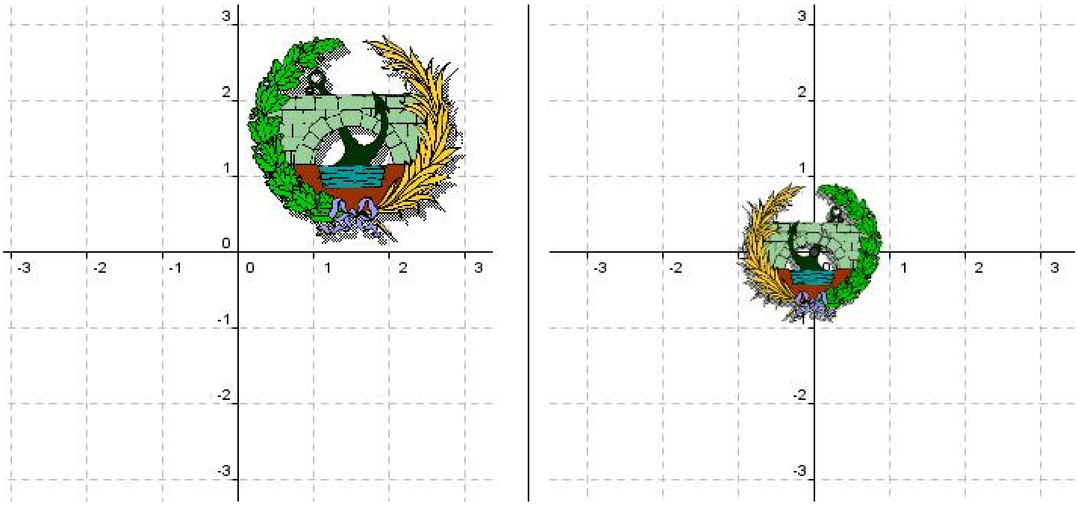
(iii) Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano $ABC$.

(iv) Hallar el simétrico de $P$ respecto de la simetría anterior.

**(Examen final, mayo 2011)**

---

**7.**– Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura en la otra.




**(Examen final, junio 2008)**

---

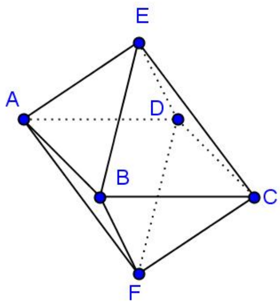
**8.**– Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el triángulo $ABC$ en $A'B'C'$ sabiendo que:

$$A = (1, 1), \quad B = (3, 2), \quad C = (2, 4), \quad A' = (2, 3), \quad superficie(A'B'C') = 10.$$

**(Examen final, mayo 2012)**

---

**9.**– En el espacio afín $E_3$ se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ y $D = (1, 0, -1)$.




(i) Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.

(ii) Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.

(iii) Hallar la ecuación del plano $\pi$ que contiene al punto medio de las aristas $AE$, $BE$ y $CF$.

(iv) Probar que el plano $\pi$ pasa por el punto medio de las aristas $AD$, $BC$ y $DF$.

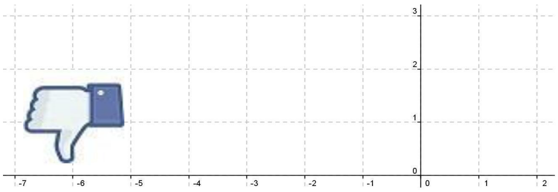
(v) Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.

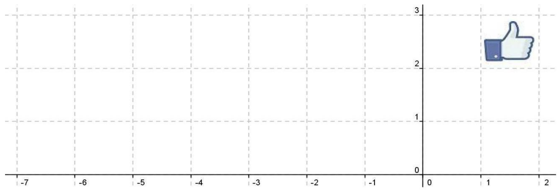
(vi) Calcular la proyección ortogonal del punto $E$ sobre el plano que contiene a los vértices $DCF$.

**(Examen final, julio 2012)**

---

**10.–** Dar la ecuación de una homotecia que transforme una figura en otra:






**(Examen final, julio 2011)**

---

**11.–** En el espacio $E_3$ se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas $r$ y $s$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determinar la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a $r$ y $s$ y son perpendiculares a $s$.

**(Examen final, junio 2007)**

---

**12.–** En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea $P$ el punto de coordenadas $(0, 1)$. Para cada recta $r$ pasando por el punto $P$, llamamos $A$ y $B$ a los puntos de intersección de $r$ con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de $A$ y $B$. ¿Qué tipo de curva se obtiene?.

**(Examen final, junio 2008)**

---

**13.–** En el espacio afín $E_3$, calcular el lugar geométrico de las rectas que pasan por el punto $(1, 0, 0)$ y forman un ángulo de 30 grados con el plano $2x + y + 2z - 9 = 0$.

---

# ÁLGEBRA LINEAL II — Problemas adicionales

**Geometría afín.** (Curso 2012–2013)

**I.–** En el plano afín $E_2$ y con respecto a una referencia rectangular se tiene un triángulo $ABC$ de vértices $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(c,d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.

**(Segundo parcial, junio 2007)**

---

**II.–** Consideramos el espacio afín euclídeo $E_3$ con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:

$$G=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A=(0,0,0),\ B=(1,0,0),\ C=(2,0,1),\ D=(1,1,1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice $A$ sobre la base opuesta $BCD$.

**(Examen final, septiembre 2009)**

---

**III.–** En el espacio $E_2$ dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas $r: x=1$ y $s: y=x$. Hallar una recta que pase por $M(2,1)$ y que corta a $r$ y a $s$ en dos puntos distintos (respectivamente $A$ y $B$), tales que $M$ equidiste de $A$ y $B$.

**(Examen extraordinario, setiembre 2001)**

---

**IV.–** En el plano afín y con respecto a una referencia rectangular, calcular la ecuación de un giro que lleva la recta $3x-4y-3=0$ a la recta $4x-3y-4=0$.

**(Segundo Parcial, mayo 2004)**

---

**V.–** En el espacio afín euclídeo y con respecto a un sistema de referencia rectangular, se consideran las rectas

$$r:\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y=0, \end{cases} \qquad s: x=y=z.$$

Encontrar un plano paralelo a $r$ y a $s$ y equidistante de ambas.

**(Examen final, junio 2001)**

---

**VI.–** En el espacio afín euclídeo ordinario se considera un sistema de referencia $\mathcal{R}=\{O,\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$, en el que la matriz de Gram asociada a la base del sistema es $G$, las rectas $r$ y $s$ y el plano $\Pi$.

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad r:\begin{cases} x+y+z &= -1 \\ y+z &= 2, \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= 2 \\ z &= 1+\lambda \end{cases} \qquad \Pi: x+2y-z=1$$

Se pide:

(a) Distancia de $r$ a $s$.

(b) Plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\Pi$.

(c) ángulo formado por $r$ y $s$.

(d) ángulo formado por $r$ y $\Pi$.

(e) Distancia de $s$ a $\Pi$.

---

**VII.–** En el espacio afín euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano $\Pi$ corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1,2,2)$ forman con el plano $\Pi$ un ángulo de $60°$.

**(Segundo parcial, junio 2003)**

---

**VIII.–** En el espacio afín $E_3$ con el producto escalar usual, consideramos las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 0 = z - 1 \\ 0 = y \end{cases} , \quad s \equiv \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y + z - 2 \end{cases}$$

(i) Hallar la ecuación de una recta que pase por $P(1,1,-1)$ y corte a $r$ y $s$.

(ii) Hallar la ecuación de un plano paralelo a $r$ y $s$ y que equidiste de ambas.

**(Examen final, julio 2011)**

---

**IX.–** En el plano afín euclídeo $E_2$ y con respecto a una referencia rectangular, sea $C$ la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de $C$ paralelas a la recta $x = y$.

**(Examen final, septiembre 2006)**

---

**X.–** En el espacio afín euclídeo $E_3$ con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se considera un cubo contenido en el semiespacio superior ($E_3^+ = \{(x,y,z) \in E_3 | z \geq 0\}$). Se sabe que tres de sus vértices pertenecientes a una misma cara tienen por coordenadas:

$$A = (0,0,0), \quad B = (5,0,0), \quad C = (0,3,4)$$

Calcular la ecuación del plano donde descansa la cara opuesta a la dada.

**(Examen extraordinario, diciembre 2009)**

---

**XI.–** En el plano afín $E_2$ y con respecto al producto escalar usual encontrar la ecuación de <u>*todas*</u> las rectas que distan 1 unidad del origen de coordenadas y 2 unidades del punto $(4,0)$.

---

**XII.–** En el espacio afín euclídeo $E_3$ con el producto escalar usual, consideramos la recta $r$ de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Calcular las ecuaciones de un giro de 90 grados, con semieje formado por los puntos de $r$ con coordenada $y$ negativa y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica.

b) Dado el plano $\pi : x + y + z = 0$ hallar la ecuación del plano transformado por el giro anterior.

c) Si hacemos girar la recta:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

sobre el eje $r$, indicar razonadamente que tipo de superficie se obtiene (no es necesario calcular su ecuación).

**(Examen extraordinario, septiembre 2008)**

---

**XIII.–** En el espacio afín $E_3$ y con respecto a una referencia rectangular se considera un tetraedro regular de vértices $A, B, C, D$. Se sabe que los vértices tienen todas sus coordenadas no negativas, $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$ y que el vértice $C$ está en el plano $z = 0$.

a) Calcular las coordenadas de los vértices $C$ y $D$.

b) Calcular el ángulo que forman dos caras del tetraedro.

c) Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

c.i) ¿Existe una isometría que deje fijos dos vértices cualesquiera e intercambie los otros dos?. ¿Puede ser un giro?.

c.ii) ¿Existe una isometría que lleve los vértices $A, B, C$ y $D$ en $B, C, D$ y $A$ respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.

c.iii) ¿Existe una isometría que lleve los vértices $A, B, C$ y $D$ en $C, D, A$ y $B$ respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.

**(Segundo parcial, junio 2008)**

---

**XIV.–** En el plano afín $E_2$ y con respecto a un sistema de referencia rectangular consideramos las rectas $r, s$ de ecuaciones:

$$r : x = 0; \qquad s : x + y = 0.$$

Calcular la ecuación de todas las rectas $t$ que pasan por el punto $(0, -1)$ y tales que el triángulo formado por los puntos de corte de $r, s$ y $t$ es isósceles.

**(Segundo parcial, mayo 2005)**

---

**XV.–** Supongamos que escogemos 2011 puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?

**(Examen final, julio 2011)**

---