1.– Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:

(a) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$;

(b) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1),(2,0,1)\}$;

(c) la rotación de 60^o alrededor del semieje que contiene al $(1,1,1)$ (considerando en $\mathbb{R}^3$ la orientación correspondiente a la base de partida).

2.– En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar usual y la orientación dada por la base canónica. Calcular las ecuaciones del giro de 45 grados y semieje generado por el vector $(1,1,1)$.

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

3.– En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar cuya matriz de Gram respecto a la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un giro de 36.87^o, de semieje generado por el vector $(1,0,0)$ y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

Observación: $sin(36.87^o) = \frac{3}{5}$.

(Examen extraordinario, diciembre 2008)

4.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación de la base canónica. Se define la transformación ortogonal que en esta base tiene asociada la matriz

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Definir su naturaleza y descomponerla en giros y/o simetrías.

(Examen final, junio 2007)

5.– En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ se considera una transformación $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base anterior es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que es ortogonal. Hallar sus autovalores y autovectores. Interpretarla geométricamente, considerando la orientación de la base de partida.

6.– En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ se considera una transformación $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$t(\bar{e}_1) = \frac{4}{5}\bar{e}_2 + \frac{3}{5}\bar{e}_3, \quad t(\bar{e}_2) = \bar{e}_1, \quad t(\bar{e}_3) = -\frac{3}{5}\bar{e}_2 + \frac{4}{5}\bar{e}_3$$

Demostrar que es ortogonal. Interpretarla geométricamente, considerando la orientación de la base de partida.

7.– En R^3 se considera una aplicación bilineal $f : R^3 \times R^3 \longrightarrow R$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea además un endomorfismo $t : R^3 \longrightarrow R^3$ con matriz asociada respecto de la base canónica:

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que f es un producto escalar.

b) ¿Es t es una transformación ortogonal con el producto escalar usual? ¿Y con el producto escalar definido por f?.

c) En el caso de que si sea una transformación ortogonal, describir geométricamente t considerando como orientación positiva la dada por la base canónica (indicar si procede el ángulo y semieje de giro y/o el subespacio de simetría).

(Segundo parcial, junio 2008)

8.– Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

$$f(1,0,0) = (-1,0,0), \qquad det(F_{CC}) = -1, \qquad traza(F_{CC}) = 1.$$

(Examen final, junio 2008)

9.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual consideramos los planos $\pi_1 : x+y-z = 0$ y $\pi_2 : 2x - y + z = 0$. Hallar las ecuaciones de un giro que lleve el plano π_1 en el plano π_2.

10.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1,2,-2)$ y $\bar{u}_2 = (1,1,0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1,0,-1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U.

11.– Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónioca. Para cada $a, b \in R$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.

(ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortgonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

(Examen final, junio 2010)

12.– Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $traza(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

13.– Encontrar la única respuesta correcta, en las siguientes cuestiones:

(a) En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ tenemos una transformación ortogonal f tal que su único vector invariante es el nulo.

◯ f puede ser una rotación.

◯ f nunca puede ser una simetría respecto del origen.

◯ f siempre es una transformación ortogonal inversa.

◯ f^2 puede no ser una rotación.

(Segundo parcial, junio 1999)

(b) Sea V un espacio euclídeo de dimensión 3 y $t : V \to V$ una transformación ortogonal tal que en una determinada base de V, la traza de la matriz asociada a t es igual a 4.

◯ t es necesariamente un giro.

◯ t es necesariamente una simetría ortogonal respecto a un subespacio de V de dimensión 2.

◯ Si la base B es ortonormal, t es un giro.

◯ No existe ninguna transformación ortogonal en las condiciones del enunciado.

(Segundo parcial, junio 1999)

(c) En un espacio vectorial euclídeo E de dimensión 3 se considera la orientación dada por determinada base ortonormal $B = \{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$. Si la matriz de un determinado endomorfismo $f : E \to E$ en la base B tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

◯ f es un giro de $-\pi/3$ con respecto a algún vector $\bar{v} \in E$, $\bar{v} \neq 0$.

◯ f es un giro de $\pi/4$ con respecto a algún vector $\bar{v} \in E$, $\bar{v} \neq 0$.

◯ si la base B' tiene distinta orientación que B, la matriz de f en B' tiene determinante -1.

◯ independientemente de la orientación de referencia, f es un giro de $\pi/3$ con respecto a $\bar{e}_1$.

(Segundo parcial, junio 1998)

I.– Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1,0,0)$

(Segundo parcial, junio 2006)

II.– En R^3 con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX.

(Segundo parcial, junio 2009)

III.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación de la base canónica. Se define la transformación ortogonal que en esta base tiene asociada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-2)/4 & (-\sqrt{2}-2)/4 & -1/2 \\ (-\sqrt{2}-2)/4 & (\sqrt{2}-2)/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Calcular los autovectores de f, definir su naturaleza y descomponerla en giros y/o simetrías.

IV.– En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector $(3,4)$ en el vector:

a) $(2,6)$.

b) $(4,3)$

(Examen final, diciembre 2009)

V.– En $\mathbb{R}^2$ y en una base orientada $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, tal que el módulo de $\vec{e}_1$ es 1 y el de $\vec{e}_2$ es $\sqrt{2}$. Hallar todas las transformaciones ortogonales que transforman el vector $\vec{e}_1$ en el vector $\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2$.

(Examen final, junio 2004)

VI.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$B = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}_3$ cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -8/5 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/5 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que f es una transformación ortogonal.

(b) Clasificar razonadamente f, indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.

(Examen final, diciembre 2005)

VII.– Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B. Determinar e interpretar geométricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.

VIII.– En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.

$$U = \{(x,y,z) \in R^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \qquad V = \{(0,1,0)\}.$$

(Examen final, julio 2009)

IX.– Determinar si el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto a un base ortonormal es:

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

(Examen final, junio 2006)

X.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α. Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

(Segundo parcial, junio 2002)
