ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 2.3

Transformaciones ortogonales (Curso 2024–2025)

1.– Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:

(a) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$;

(b) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1),(2,0,1)\}$;

(c) la rotación de 60^{o} alrededor del semieje que contiene al $(1,1,1)$ (considerando en $\mathbb{R}^3$ la orientación correspondiente a la base de partida).

2.– En el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ hallar las ecuaciones de un giro de ángulo 90^o y semieje generado por el vector $(3,0,4)$.

(Examen final, julio 2017)

3.– En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar cuya matriz de Gram respecto a la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un giro de 36.87^o, de semieje generado por el vector $(1,0,0)$ y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

Observación: $sin(36.87^o) = \frac{3}{5}$.

(Examen extraordinario, diciembre 2008)

4.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tiene por matriz asociada respecto de la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Demostrar que es una transformación ortogonal. Clasificarla y describirla geométricamente.

(Examen final, julio 2023)

5.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual se considera el endomorfismo $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t(x,y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$. Probar que t es una transformación ortogonal y describirla geométricamente indicando si procede el ángulo de giro o el eje de simetría.

(Examen final, julio 2018)

6.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica:

(i) De un endomorfismo se conoce su matriz asociada en la base canónica $T_C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Probar que es una transformación ortogonal y clasificarla describiendo geométricamente como actúa. (1 punto)

(ii) Calcular la matriz asociada a una simetría respecto al plano de ecuación $x + y - z = 0$. (1 punto)

(iii) ¿Es posible conseguir la simetría anterior componiendo adecuadamente dos giros?. Razona la respuesta (0.5 puntos).

(Examen final, julio 2020)

7.– Indica razonadamente la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^3$ y $traza(T) = 2$ entonces t es un giro de 60^o.

(ii) Si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^3$ y $traza(T) = 0$ entonces t es un giro de 120^o.

(iii) En $\mathbb{R}^3$ la composición de una simetría respecto a una recta con una simetría respecto a un plano es un giro.

(iv) Si t es una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ y $t(1, 0, 1) = (-1, 0, -1)$ entonces se trata de una transformación inversa.

(Examen final, junio 2021)

8.– Razona la falsedad o veracidad de las siguiente cuestiones:

(i) Si T es la matriz de una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^2$ y $traza(T) = 1$ entonces T es un giro. (0.5 puntos)

(ii) Si T es la matriz de un giro en $\mathbb{R}^2$ entonces no tiene autovalores reales. (0.5 puntos)

(iii) Si consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con las condiciones usuales (producto escalar usual y orientación positiva dada por la base canónica), $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de una simetría respecto al plano $x - y = 0$. (0.5 puntos)

(iv) En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ (condiciones usuales) se da una transformación ortogonal t. Gauss sostiene que es un giro de 90 grados y Euler que es es un giro de -90 grados. ¿Pueden estar ambos en lo cierto?. (0.5 puntos)

(Examen final, junio 2020)

9.– Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal t en el espacio eculideo $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que $det(T) < 0$, $t(1, 1, 2) = (-1, -1, -2)$ y $traza(T) = 1$, clasificar y describir geométricamente la transformación t.

(Examen final, mayo 2018)

10.– En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar razonadamente las matrices asociadas respecto a la base canónica de todas las posibles transformaciones ortogonales inversas que lleven la recta $x + y = 0$ en la recta $x - y = 0$.

(Examen final, junio 2021)

11.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual consideramos los planos $\pi_1 : x+y-z = 0$ y $\pi_2 : 2x - y + z = 0$. Hallar las ecuaciones de un giro que lleve el plano π_1 en el plano π_2.

12.– Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual hallar la matriz asociada de una simetría respecto a un plano, que lleve el vector $(3, 0, 4)$ en el vector $(5, 0, 0)$.

(Examen final, mayo 2024)

13.– En $\mathbb{R}^2$ respecto al producto escalar usual se considera una transformación lineal $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(i) Hallar a y b para que t sea una simetría respecto a una recta.

(ii) Para cada uno de los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior calcular el eje de simetría.

(Examen final, mayo 2017)

14.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación lineal $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada respecto a la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar para que valores de a y b, t es una transformación ortogonal.

(ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificarla y describirla geométricamente.

(Examen final, mayo 2022)

15.– Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si $det(T_C) = 1$ entonces t es un giro.

(ii) Si $traza(T_C) = 4$ entonces t no es una transformación ortogonal.

(iii) Si t es una transformación ortogonal y 1 es autovalor de t, entonces t es un giro.

(iv) Si t es una transformación ortogonal entonces la composición $t \circ t$ es un giro.

(v) Si T_C es una simetría respecto a una recta entonces $det(T_C) = 1$.

(vi) Si $traza(T_c) = C$ entonces T_C es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano.

(vii) Si T_C es un giro entonces $traza(T_c) \geq -1$.

(Examen final, julio 2023 y 2024)

I.– Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

(Segundo parcial, junio 2006)

II.– En R^3 con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX.

(Segundo parcial, junio 2009)

III.– Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

$$f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0), \qquad det(F_{CC}) = -1, \qquad traza(F_{CC}) = 1.$$

(Examen final, junio 2008)

IV.– Consideramos el espacio ecuclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.

(ii) Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.

(iii) Si T es una simetría respecto a una recta entonces $traza(T) = -1$.

(iv) Si $traza(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

(v) Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.

(Examen final, julio 2012)

V.– En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector $(3, 4)$ en el vector:

a) $(2, 6)$.

b) $(4, 3)$

(Examen final, diciembre 2009)

VI.– Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónioca. Para cada $a, b \in R$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.

(ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortgonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

(Examen final, junio 2010)

VII.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}_3$ cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que f es una transformación ortogonal.

(b) Clasificar razonadamente f, indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.– Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B. Determinar e interpretar geométricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.

IX.– En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.

$$U = \{(x,y,z) \in R^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0,1,0)\}.$$

(Examen final, julio 2009)

X.– En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica se tiene un endomorfismo de matriz asociada en la base cañonica:

$$T = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de a, b, c para los cuales T es una transformación ortogonal.

(ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificar la correspondiente transformación ortogonal indicando si procede el ángulo de giro ó el eje de simetría.

(Examen final, mayo 2015)

XI.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α. Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

(Segundo parcial, junio 2002)

XII.– Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $traza(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

XIII.– Responde de manera argumentada a las siguientes cuestiones:

(i) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$?.

(ii) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal inversa en $\mathbb{R}^3$?.

(iii) Si la matriz asociada a un giro en $\mathbb{R}^3$ tiene traza cero. ¿Cuáles son los posibles valores del ángulo de giro?.

(iv) Si f es una simetría del plano con el producto escalar usual y $f(1,2) = (-1,-2)$. ¿Cuál es el eje de simetría?.

(Examen mayo, julio 2015)

XIV.– Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si T es la matriz asociada a un giro en $\mathbb{R}^3$ entonces $traza(T) \geq -1$.

(ii) La composición de dos simetrías respecto a una recta en el plano es una nueva simetría respecto a una recta.

(iii) Si dos bases tienen la misma orientación entonces el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es 1.

(iv) Si T es una transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ y 1 es autovalor de T entonces la transformación es una simetría respecto a un plano.

(Examen mayo, julio 2019)

XV.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1,2,-2)$ y $\bar{u}_2 = (1,1,0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1,0,-1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U.
