

1.— Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:

- (a) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$;
- (b) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1, 1, 1), (2, 0, 1)\}$;
- (c) la rotación de 60° alrededor del semieje que contiene al $(1, 1, 1)$ (considerando en $\mathbb{R}^3$ la orientación correspondiente a la base de partida).

2.— En el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ hallar las ecuaciones de un giro de ángulo 90° y semieje generado por el vector $(3, 0, 4)$.

(Examen final, julio 2017)

3.— En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar cuya matriz de Gram respecto a la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un giro de 36.87° , de semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$ y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

Observación: $\sin(36.87^\circ) = \frac{3}{5}$.

(Examen extraordinario, diciembre 2008)

4.— Sea $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz asociada respecto de la base canónica a una aplicación lineal t en el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$.

- (i) Demostrar que T es una transformación ortogonal.
- (ii) Clasificar y describir geoméricamente la transformación t .

(Examen final, junio 2019)

5.— En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual se considera el endomorfismo $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$. Probar que t es una transformación ortogonal y describirla geoméricamente indicando si procede el ángulo de giro o el eje de simetría.

(Examen final, julio 2018)

6.— En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica:

- (i) De un endomorfismo se conoce su matriz asociada en la base canónica $T_C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Probar que es una transformación ortogonal y clasificarla describiendo geoméricamente como actúa. (1 punto)
- (ii) Calcular la matriz asociada a una simetría respecto al plano de ecuación $x + y - z = 0$. (1 punto)
- (iii) ¿Es posible conseguir la simetría anterior componiendo adecuadamente dos giros?. Razona la respuesta (0.5 puntos).

(Examen final, julio 2020)

7.— Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Conocida la traza de la matriz asociada a una transformación ortogonal en el plano se puede determinarse si es un giro o una simetría.
- (ii) En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a un plano puede ser una simetría respecto a una recta.
- (iii) En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a una recta siempre es un giro.
- (iv) Si la traza de la matriz asociada a una transformación ortogonal en el espacio es 3, entonces es una simetría respecto al origen.

(Examen final, julio 2016)

8.— Razona la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

- (i) Si T es la matriz de una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^2$ y $\text{traza}(T) = 1$ entonces T es un giro. (0.5 puntos)
- (ii) Si T es la matriz de un giro en $\mathbb{R}^2$ entonces no tiene autovalores reales. (0.5 puntos)
- (iii) Si consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con las condiciones usuales (producto escalar usual y orientación positiva dada por la base canónica), $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de una simetría respecto al plano $x - y = 0$. (0.5 puntos)
- (iv) En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ (condiciones usuales) se da una transformación ortogonal t . Gauss sostiene que es un giro de 90 grados y Euler que es un giro de -90 grados. ¿Pueden estar ambos en lo cierto?. (0.5 puntos)

(Examen final, junio 2020)

9.— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal t en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que $\det(T) < 0$, $t(1, 1, 2) = (-1, -1, -2)$ y $\text{traza}(T) = 1$, clasificar y describir geoméricamente la transformación t .

(Examen final, mayo 2018)

10.— En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual consideramos los planos $\pi_1 : x+y-z = 0$ y $\pi_2 : 2x - y + z = 0$. Hallar las ecuaciones de un giro que lleve el plano π_1 en el plano π_2 .

11.— En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1, 2, -2)$ y $\bar{u}_2 = (1, 1, 0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1, 0, -1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U .

12.— En $\mathbb{R}^2$ respecto al producto escalar usual se considera una transformación lineal $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

- (i) Hallar a y b para que t sea una simetría respecto a una recta.
- (ii) Para cada uno de los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior calcular el eje de simetría.

(Examen final, mayo 2017)

13.— En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica, para cada par de números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se considera el endomorfismo:

$$t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x, y, z) = (ax + bz, -y, bx + az)$$

- (i) Hallar los valores de a, b para que t sea una transformación ortogonal.
- (ii) Para cada uno de los casos determinados en el apartado anterior, clasificar la transformación describiéndola geoméricamente.

(Examen final, julio 2014)

14.— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) La traza de la matriz asociada a una simetría respecto a una recta en el plano es 0.
- (ii) Si la matriz asociada a una transformación ortogonal en el plano tiene traza 0 entonces es una simetría respecto a una recta.
- (iii) Una simetría en el espacio respecto a una recta es una transformación inversa.
- (iv) En el espacio, la composición de una simetría respecto a un punto y una simetría respecto a un plano siempre es un giro.

(Examen final, junio 2019)

15.— Sea A la matriz asociada a una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a una base cualquiera. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Si A es un giro entonces $\text{traza}(A) \geq -1$.
- (ii) Si $\text{traza}(A) = 1$ entonces A es un giro.
- (iii) Si A es una simetría respecto a una recta entonces $\det(A) = 1$.
- (iv) Si $\text{traza}(A) = 0$ entonces A es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano.

(Examen final, julio 2017)

- I.**— Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

(Segundo parcial, junio 2006)

- II.**— En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX .

(Segundo parcial, junio 2009)

- III.**— Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

$$f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0), \quad \det(F_{CC}) = -1, \quad \text{traza}(F_{CC}) = 1.$$

(Examen final, junio 2008)

- IV.**— Consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

- (i) Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.
- (ii) Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.
- (iii) Si T es una simetría respecto a una recta entonces $\text{traza}(T) = -1$.
- (iv) Si $\text{traza}(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.
- (v) Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.

(Examen final, julio 2012)

- V.**— En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector $(3, 4)$ en el vector:

- a) $(2, 6)$.
- b) $(4, 3)$

(Examen final, diciembre 2009)

VI.— Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.
- (ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

(Examen final, junio 2010)

VII.— En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}_3$ cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

- (a) Probar que f es una transformación ortogonal.
- (b) Clasificar razonadamente f , indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.— Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B . Determinar e interpretar geoméricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.

IX.— En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V .

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

(Examen final, julio 2009)

X.— En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica se tiene un endomorfismo de matriz asociada en la base canónica:

$$T = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar los valores de a, b, c para los cuales T es una transformación ortogonal.
- (ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificar la correspondiente transformación ortogonal indicando si procede el ángulo de giro ó el eje de simetría.

(Examen final, mayo 2015)

XI.— En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α . Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

(Segundo parcial, junio 2002)

XII.— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $\text{traza}(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

XIII.— Responde de manera argumentada a las siguientes cuestiones:

- (i) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$?
- (ii) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal inversa en $\mathbb{R}^3$?
- (iii) Si la matriz asociada a un giro en $\mathbb{R}^3$ tiene traza cero. ¿Cuáles son los posibles valores del ángulo de giro?
- (iv) Si f es una simetría del plano con el producto escalar usual y $f(1, 2) = (-1, -2)$. ¿Cuál es el eje de simetría?

(Examen mayo, julio 2015)

XIV.— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) Si T es la matriz asociada a un giro en $\mathbb{R}^3$ entonces $\text{traza}(T) \geq -1$.
- (ii) La composición de dos simetrías respecto a una recta en el plano es una nueva simetría respecto a una recta.
- (iii) Si dos bases tienen la misma orientación entonces el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es 1.
- (iv) Si T es una transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ y 1 es autovalor de T entonces la transformación es una simetría respecto a un plano.

(Examen mayo, julio 2019)
