

1.— Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:

- (a) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$;
- (b) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1, 1, 1), (2, 0, 1)\}$;
- (c) la rotación de 60° alrededor del semieje que contiene al $(1, 1, 1)$ (considerando en $\mathbb{R}^3$ la orientación correspondiente a la base de partida).

2.— En el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ hallar las ecuaciones de un giro de ángulo 90° y semieje generado por el vector $(3, 0, 4)$.

(Examen final, julio 2017)

3.— En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar cuya matriz de Gram respecto a la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un giro de 36.87° , de semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$ y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

Observación: $\sin(36.87^\circ) = \frac{3}{5}$.

(Examen extraordinario, diciembre 2008)

4.— En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación de la base canónica. Se define la transformación ortogonal que en esta base tiene asociada la matriz

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Definir su naturaleza y descomponerla en giros y/o simetrías.

(Examen final, julio 2015)

5.— Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio euclideo con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica. Se considera el endomorfismo:

$$t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \right).$$

- (i) Probar que t es una transformación ortogonal.

- (ii) Describir geométicamente la transformación t .
- (iii) Dada la recta r de ecuaciones $x + y = 0$, $z = 0$, hallar las ecuaciones de la recta que se obtiene al aplicarle el endomorfismo t a r .

(Examen final, mayo 2014)

6.— Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Conocida la traza de la matriz asociada a una transformación ortogonal en el plano se puede determinarse si es un giro o una simetría.
- (ii) En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a un plano puede ser una simetría respecto a una recta.
- (iii) En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a una recta siempre es un giro.
- (iv) Si la traza de la matriz asociada a una transformación ortogonal en el espacio es 3, entonces es una simetría respecto al origen.

(Examen final, julio 2016)

7.— En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica se tiene un endomorfismo de matriz asociada en la base canónica:

$$T = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar los valores de a, b, c para los cuales T es una transformación ortogonal.
- (ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificar la correspondiente transformación ortogonal indicando si procede el ángulo de giro ó el eje de simetría.

(Examen final, mayo 2015)

8.— Consideramos el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Calcular la matriz asociada T_C (respecto de la base canónica) de una transformación ortogonal $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumple:

$$\det(T_C) = -1, \quad \text{traza}(T_C) = 1/5, \quad t(0, 1, 0) = (0, -1, 0).$$

¿Es única la solución?

(Examen final, mayo 2011)

9.— En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual consideramos los planos $\pi_1 : x + y - z = 0$ y $\pi_2 : 2x - y + z = 0$. Hallar las ecuaciones de un giro que lleve el plano π_1 en el plano π_2 .

10.— En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1, 2, -2)$ y $\bar{u}_2 = (1, 1, 0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1, 0, -1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U .

- 11.— En $\mathbb{R}^2$ respecto al producto escalar usual se considera una transformación lineal $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

- (i) Hallar a y b para que t sea una simetría respecto a una recta.
- (ii) Para cada uno de los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior calcular el eje de simetría.

(Examen final, mayo 2017)

- 12.— En el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica, para cada par de números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se considera el endomorfismo:

$$t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x, y, z) = (ax + bz, -y, bx + az)$$

- (i) Hallar los valores de a, b para que t sea una transformación ortogonal.
- (ii) Para cada uno de los casos determinados en el apartado anterior, clasificar la transformación describiéndola geoméricamente.

(Examen final, julio 2014)

- 13.— Responde de manera argumentada a las siguientes cuestiones:

- (i) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$?
- (ii) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal inversa en $\mathbb{R}^3$?
- (iii) Si la matriz asociada a un giro en $\mathbb{R}^3$ tiene traza cero. ¿Cuáles son los posibles valores del ángulo de giro?
- (iv) Si f es una simetría del plano con el producto escalar usual y $f(1, 2) = (-1, -2)$. ¿Cuál es el eje de simetría?

(Examen mayo, julio 2015)

- 14.— En $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica se consideran las transformaciones ortogonales $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se sabe que f es un giro de 90 grados y g un giro de 30 grados. Sean A, B las matrices asociadas respectivamente a f y g con respecto a la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) $A \cdot B$ es la matriz de una transformación ortogonal.
- (ii) $A \cdot B$ es la matriz de un giro.
- (iii) $A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.
- (iv) Si f y g tiene el mismo eje de giro, $A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.
- (v) $A \cdot B$ puede ser la matriz de un giro de 60 grados.

(Examen final, mayo 2013)

15.— Sea A la matriz asociada a una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a una base cualquiera. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Si A es un giro entonces $\text{traza}(A) \geq -1$.
- (ii) Si $\text{traza}(A) = 1$ entonces A es un giro.
- (iii) Si A es una simetría respecto a una recta entonces $\det(A) = 1$.
- (iv) Si $\text{traza}(A) = 0$ entonces A es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano.

(Examen final, julio 2017)

- I.**— Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

(Segundo parcial, junio 2006)

- II.**— En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX .

(Segundo parcial, junio 2009)

- III.**— Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

$$f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0), \quad \det(F_{CC}) = -1, \quad \text{traza}(F_{CC}) = 1.$$

(Examen final, junio 2008)

- IV.**— Consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

- (i) Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.
- (ii) Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.
- (iii) Si T es una simetría respecto a una recta entonces $\text{traza}(T) = -1$.
- (iv) Si $\text{traza}(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.
- (v) Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.

(Examen final, julio 2012)

- V.**— En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector $(3, 4)$ en el vector:

- a) $(2, 6)$.
- b) $(4, 3)$

(Examen final, diciembre 2009)

VI.— Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.
- (ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

(Examen final, junio 2010)

VII.— En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}_3$ cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

- (a) Probar que f es una transformación ortogonal.
- (b) Clasificar razonadamente f , indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.— Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B . Determinar e interpretar geoméricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.

IX.— En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V .

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

(Examen final, julio 2009)

X.— Determinar si el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto a una base ortonormal es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

(Examen final, junio 2006)

XI.— En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α . Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

(Segundo parcial, junio 2002)

XII.— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $\text{traza}(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)
