ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 2.3

Transformaciones ortogonales — (Curso 2012–2013)

1.– Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:

(a) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$;

(b) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1),(2,0,1)\}$;

(c) la rotación de 60^o alrededor del semieje que contiene al $(1,1,1)$ (considerando en $\mathbb{R}^3$ la orientación correspondiente a la base de partida).

2.– En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar usual y la orientación dada por la base canónica. Calcular las ecuaciones del giro de 45 grados y semieje generado por el vector $(1,1,1)$.

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

3.– En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar cuya matriz de Gram respecto a la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un giro de 36.87^o, de semieje generado por el vector $(1,0,0)$ y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

Observación: $sin(36.87^o) = \dfrac{3}{5}$.

(Examen extraordinario, diciembre 2008)

4.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación de la base canónica. Se define la transformación ortogonal que en esta base tiene asociada la matriz

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Definir su naturaleza y descomponerla en giros y/o simetrías.

(Examen final, junio 2007)

5.– En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ se considera una transformación $t:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base anterior es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que es ortogonal. Hallar sus autovalores y autovectores. Interpretarla geométricamente, considerando la orientación de la base de partida.

6.– Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in R$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.

(ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

(Examen final, mayo 2012)

7.– En R^3 se considera una aplicación bilineal $f : R^3 \times R^3 \longrightarrow R$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea además un endomorfismo $t : R^3 \longrightarrow R^3$ con matriz asociada respecto de la base canónica:

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que f es un producto escalar.

b) ¿Es t es una transformación ortogonal con el producto escalar usual? ¿Y con el producto escalar definido por f?.

c) En el caso de que si sea una transformación ortogonal, describir geométricamente t considerando como orientación positiva la dada por la base canónica (indicar si procede el ángulo y semieje de giro y/o el subespacio de simetría).

(Segundo parcial, junio 2008)

8.– Consideramos el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Calcular la matriz asociada T_C (respecto de la base canónica) de una transformación ortogonal $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que cumple:

$$det(T_C) = -1, \qquad traza(T_C) = 1/5, \qquad t(0,1,0) = (0,-1,0).$$

¿Es única la solución?.

(Examen final, mayo 2011)

9.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual consideramos los planos $\pi_1 : x+y-z = 0$ y $\pi_2 : 2x - y + z = 0$. Hallar las ecuaciones de un giro que lleve el plano π_1 en el plano π_2.

10.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1, 2, -2)$ y $\bar{u}_2 = (1, 1, 0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1, 0, -1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U.

11.– Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónioca. Para cada $a, b \in R$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.

(ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortgonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

(Examen final, junio 2010)

12.– Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $traza(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

13.– Consideramos el espacio ecuclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.

(ii) Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.

(iii) Si T es una simetría respecto a una recta entonces $traza(T) = -1$.

(iv) Si $traza(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

(v) Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.

(Examen final, julio 2012)

I.– Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

(Segundo parcial, junio 2006)

II.– En R^3 con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX.

(Segundo parcial, junio 2009)

III.– Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

$$f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0), \qquad det(F_{CC}) = -1, \qquad traza(F_{CC}) = 1.$$

(Examen final, junio 2008)

IV.– Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal $\mathbb{R}^2$ respecto a una base arbitaria. Razonar la veracidad o la falsedad de las siguientes cuestiones:

(i) $|traza(T)| \leq 2$.

(ii) Si $traza(T) = 2$ entonces $T = Id$.

(iii) Si $det(T) = -1$ entonces $traza(T) = 0$.

(iv) Si $traza(T) = 0$ entonces $det(T) = -1$.

(Examen final, julio 2011)

V.– En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector $(3, 4)$ en el vector:

a) $(2, 6)$.

b) $(4, 3)$

(Examen final, diciembre 2009)

VI.– En $\mathbb{R}^2$ y en una base orientada $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, tal que el módulo de $\vec{e}_1$ es 1 y el de $\vec{e}_2$ es $\sqrt{2}$. Hallar todas las transformaciones ortogonales que transforman el vector $\vec{e}_1$ en el vector $\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2$.

(Examen final, junio 2004)

VII.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}_3$ cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -8/5 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/5 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que f es una transformación ortogonal.

(b) Clasificar razonadamente f, indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.– Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B. Determinar e interpretar geométricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.

IX.– En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.

$$U = \{(x,y,z) \in R^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0,1,0)\}.$$

(Examen final, julio 2009)

X.– Determinar si el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto a un base ortonormal es:

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

(Examen final, junio 2006)

XI.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α. Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

(Segundo parcial, junio 2002)
