

- 1.— Se considera un espacio euclídeo de dimensión 3, y en él una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ tal que el módulo de $\bar{e}_1$ y el de $\bar{e}_3$ es 2 y el de $\bar{e}_2$ es 1, y además el ángulo formado por $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_3$ es de 90° y los formados por $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ y por $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ son de 60° . Se dan los vectores

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{b} &= \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3\end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Matriz de Gram en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$
 - (b) Módulo de $\bar{a}$ y de $\bar{b}$.
 - (c) Producto escalar de $\bar{a}$ por $\bar{b}$.
 - (d) Coordenadas covariantes de $\bar{a}$ y $\bar{b}$.
 - (e) Calcular un vector de módulo 2, que forme un ángulo de 90° con $\bar{a}$ y uno de 60° con $\bar{b}$.
-

- 2.— En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se conoce la matriz fundamental del producto escalar en la base canónica

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y dos subespacios vectoriales $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ y $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$. Se pide:

- (a) Proyección ortogonal de $(2, 1, 3)$ sobre el subespacio U .
 - (b) Matriz de la proyección ortogonal sobre U .
 - (c) Matriz de la proyección ortogonal sobre V .
-

- 3.— En un espacio vectorial euclídeo se considera la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, hallar una base ortonormal sabiendo que:

- El módulo del vector $\bar{u}_1$ es igual al módulo del vector $\bar{u}_2$.
- El ángulo formado por $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_3$ es el mismo que el formado por $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$.
- Existe un vector cuyas coordenadas contravariantes en la base B son $(0, 1, 1)$ y las covariantes en la misma base son $(-2, 1, 2)$.
- El vector cuyas coordenadas contravariantes en la base B son $(1, 1, 1)$ es unitario.

(Examen final, junio 2002)

- 4.— En el espacio vectorial real de las matrices simétricas 2×2 , se considera el producto escalar que en la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ tiene asociada la siguiente matriz de Gram

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Encontrar tres matrices que formen una base ortonormal.
 b) Calcular la matriz que es la proyección ortogonal de $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio generado por las matrices $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(Segundo parcial, mayo 2001)

- 5.— Se considera el espacio vectorial real E de las funciones continuas $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ y la aplicación

$$\begin{aligned} p : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longrightarrow \int_0^\pi f(x) g(x) dx. \end{aligned}$$

- (a) Demostrar que esta aplicación dota a E de la estructura de espacio vectorial euclídeo.
 (b) Si llamamos U al subespacio vectorial generado por $\{1, \sin x, \cos x, \sin^2 x\}$, encontrar una base ortogonal de U usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.
-

- 6.— Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar ordinario. Encontrar la matriz F , en la base canónica, de un endomorfismo simétrico f de $\mathbb{R}^3$, sabiendo que el núcleo de f es el subespacio $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ y 3 es autovalor doble de f .

(Examen final, setiembre 2002)

- 7.— Para cada valor de α sea la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 + \alpha \\ -1 & 2 + \alpha & 2 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular la signatura de Q en función de los valores de α .
 (b) Para aquellos valores de α que hacen que Q sea definida positiva calcular una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto al producto escalar definido por Q .

(Segundo parcial, junio 2006)

- 8.— Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una forma bilineal dada por:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Probar que f define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

- (b) Si W es el subespacio vectorial generado por el vector $(1, 0, 1)$ calcular una base ortonormal del subespacio $W^\perp$.
- (c) Calcular la proyección ortogonal de $(1, 0, 1)$ sobre $W^\perp$.

(Examen final, diciembre 2005)

9.— En el espacio de matrices $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ consideramos las formas bilineales:

$$\begin{aligned} f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \times M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & f(A, B) &= \text{traza}(AB^t) \\ g : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \times M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & g(A, B) &= \text{traza}(AB) \end{aligned}$$

- (a) Estudiar si son simétricas.
- (b) Probar que para $n \geq 2$, f define un producto escalar, pero g no. ¿Qué ocurre para $n = 1$?
- (c) Para $n = 2$ calcular la matriz asociada a g respecto de la base canónica, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada.
- (d) Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f , calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio de matrices simétricas.
- (e) Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f , hallar una base ortonormal del subespacio generado por las matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (f) Para cualquier $n > 2$, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada a g .

(Segundo parcial, junio 2009)

10.— Sexa $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ unha forma cuadrática e $u, v \in \mathbb{R}^n$ verificando $w(u) = 1, w(v) = -1$. Probar que $\{u, v\}$ son linealmente independientes. É necesariamente w unha forma cuadrática indefinida?

(Examen final, junio 2009)

11.— Consideramos los productos escalares en $\mathbb{R}^2$ cuyas matrices de Gram respecto de la base canónica son G_1 y G_2 . Sabiendo que $G_1 = \lambda G_2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$, probar que los dos productos escalares definen la misma medida sobre ángulos de vectores, pero distinta en longitudes.

(Examen final, septiembre 2008)

12.— Encontrar la (única) respuesta correcta, de entre las indicadas, a las siguientes cuestiones:

- (a) En $\mathbb{R}^3$ se tiene una forma bilineal f cuya matriz en la base canónica es: $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$
- ☐ f es un producto escalar si y solo si $b < -a$.
- ☐ f es un producto escalar si y solo si $a = 1$ y $b < -1$.
- ☐ f siempre es un producto escalar.
- ☐ f nunca es un producto escalar.

(Segundo parcial, junio 2002)

- (b) El método de Gram-Schmidt podría utilizarse para hallar una base de vectores conjugados respecto de una forma bilineal f
- ☐ Si f es definida negativa.
 - ☐ Si f es semidefinida positiva.
 - ☐ Si f es indefinida.
 - ☐ Sólo si f es definida positiva.

(Segundo parcial, junio 2002)

- (c) Se considera un producto escalar f definido sobre $\mathbb{R}^n$. Sea $\{\bar{u}_i\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y $\{\bar{v}_i\}$ una base ortonormal respecto a f , siendo $\{\bar{v}_i\} = C\{\bar{u}_i\}$.
- ☐ C es una matriz ortogonal.
 - ☐ La matriz de Gram de f en la base canónica es CC^t .
 - ☐ C es una matriz simétrica.
 - ☐ La matriz de Gram de f en la base canónica es $C^{-1}(C^{-1})^t$.

(Segundo parcial, junio 2002)

ÁLGEBRA LINEAL II

Problemas adicionales.

Espacios Euclídeos. Ortogonalidad

(Curso 2010–2011)

I.— En un espacio vectorial real V de dimensión 3 se considera una cierta base $B = \{\bar{e}_i\}$. Hallar, en esa base, la matriz métrica G de un producto escalar definido en V del que se sabe que:

- (a) El módulo de $\bar{e}_1$ es $\sqrt{2}$ y el de $\bar{e}_2$ es $\sqrt{3}$.
- (b) El subespacio vectorial U , definido por la ecuación $x^1 + x^2 + x^3 = 0$ en la base B , es ortogonal a la envolvente de $\bar{e}_1$.
- (c) La proyección ortogonal de $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ sobre la envolvente de $\bar{e}_2$ es $3\bar{e}_2$.
- (d) El vector $\bar{e}_3$ es ortogonal a alguno del conjunto $C = \{(2, 2, 0), (2, 0, -1), (0, 2, -1)\}$, cuyos elementos vienen dados por sus coordenadas contravariantes en la base B .

(Examen final, junio 1998)

II.— En un espacio vectorial V de dimensión n , se considera una forma bilineal f cuya matriz en una determinada base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ es A^2 , siendo A una matriz real $n \times n$, no singular y simétrica. Demostrar que f es un producto escalar. Encontrar, en función de $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, una base ortonormal para f .

III.— Sea un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita, y dos subespacios cualesquiera suyos U_1 y U_2 . Comprobar que:

- (a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$
 - (b) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$
-

IV.— En $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una determinada base $\{\bar{e}_i\}$ se definen el producto escalar

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 2x^1y^1 + 2x^2y^2 + 3x^3y^3 + x^1y^2 + x^2y^1 + 2x^1y^3 + 2x^3y^1$$

y el endomorfismo f que verifica: $f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1$, $f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$, $f(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_3$. ¿Es f un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar dado arriba? En caso afirmativo, dar una base ortonormal en la que la matriz de f sea diagonal.

V.— En un espacio euclídeo V se tienen dos subespacios suplementarios V_1 y V_2 . Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2 sea simétrica es que V_1 y V_2 sean ortogonales.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VI.— Dada la matriz $n \times n$ A definida por

$$a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

¿es diagonalizable por semejanza ortogonal? En caso de que lo sea, dar una matriz de paso.

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

VII.— En un espacio euclídeo se consideran los vectores fijos y no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y la aplicación $f(\bar{x}) = (\bar{a} \cdot \bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}$. Se pide:

- (a) Ver si f es lineal.
- (b) Determinar los autovalores y autovectores.
- (c) ¿Qué condición han de cumplir $\bar{a}$ y $\bar{b}$ para que f sea diagonalizable?
- (d) Si en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ la matriz de Gram es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas covariantes de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son $(1, 2, -1)$ y $(2, 0, -3)$, respectivamente, determinar en dicha base la matriz de f , los autovalores y los autovectores.

(Examen final, junio 1997)

VIII.— Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ una forma bilineal cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio generado por $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 0)\}$.

- (a) Probar que la forma bilineal f define un producto escalar.
- (b) Obtener una base ortogonal de S respecto del producto escalar f .

(Examen final, septiembre 2005)

IX.— Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: “El conjunto formado por dos vectores no nulos y ortogonales entre sí es un sistema libre”.

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

X.— Sea E un espacio euclídeo y $f : E \rightarrow E$ un endomorfismo simétrico. Demostrar que los subespacios núcleo e imagen de f son suplementarios ortogonales.

(Segundo parcial, mayo 2001)
