ÁLGEBRA LINEAL II

Práctica 2.1-2.2

Espacios Euclídeos. Ortogonalidad

(Curso 2024–2025)

1.– Se considera un espacio euclídeo de dimensión 3, y en él una base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$ tal que el módulo de $\bar{e}_1$ y el de $\bar{e}_3$ es 2 y el de $\bar{e}_2$ es 1, y además el ángulo formado por $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_3$ es de 90^o y los formados por $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ y por $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ son de 60^o. Se dan los vectores

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{b} &= \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{aligned}$$

Se pide:

(a) Matriz de Gram en la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$

(b) Módulo de $\bar{a}$ y de $\bar{b}$.

(c) Producto escalar de $\bar{a}$ por $\bar{b}$.

(d) Calcular un vector de módulo 2, que forme un ángulo de 90^o con $\bar{a}$ y uno de 60^o con $\bar{b}$.

2.– Considerando en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Dar un par de vectores de la base canónica que sean ortogonales.

(ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal $U^\perp$.

(iii) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Calcular el ángulo que forman los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$.

(Examen final, mayo 2021)

3.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial:

$$V = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$$

(Examen final, junio 2019)

4.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dados los vectores $\vec{v} = (1,0,1)$, $\vec{u} = (0,1,1)$ calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|u\|$, $\|v\|$ y el ángulo que forman.

(Examen final, julio 2019)

5.– En $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cumpliendo:

- Los subespacios vectoriales $\mathcal{L}\{(1,0,1)\}$ y $\mathcal{L}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ son ortogonales.

- Los vectores $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$ forman un ángulo de $\pi/3$.

- Los tres vectores anteriores son unitarios.

(i) Calcular la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.

(ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal $U^\perp$ respecto al producto escalar dado.

(Examen final, mayo 2018)

6.– En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma bilineal simétrica f cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que f es un producto escalar.

(ii) Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$. Respecto al producto escalar definido por f, :

(ii.a) Hallar una base ortogonal de U por el método de Gram-Schmidt.

(ii.b) Calcular las ecuaciones paramétricas de $U^\perp$.

(iii.c) Hallar la proyección ortogonal del vector $(1,1,1)$ sobre U

(Examen final, mayo 2023)

7.– En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f(A,B) = traza(AB^t)$$

(i) Demostrar que f es un producto escalar.

(ii) Calcular la matriz de Gram de f respecto de la base canónica.

(iii) Si $U = \mathcal{L}(Id)$, hallar una base del subespacio ortogonal $U^\perp$.

(Examen final, julio 2018)

8.– Dada la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hallar una matriz P ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

9.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma bilineal f cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) Demostrar que es un producto escalar.

(ii) Respecto al producto escalar definido por f:

(ii.a) Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre $\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$.

(ii.b) Hallar una base ortogonal del subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$.

(Examen final, julio 2022)

10.– Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1. Se considera una forma bilineal $f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que f es un producto escalar.

(ii) Respecto al producto escalar definido por f:

(ii.a) Dar dos polinomios que formen una base ortonormal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

(ii.b) Hallar el ángulo que forman los polinomios $p(x) = 1 + x$ y $q(x) = 1 - x$.

(Examen final, mayo 2022)

11.– Sea el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$; se considera una forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(i) ¿Para qué valores de a es f un producto escalar?.

(ii) Calcular a para que los vectores $(1,0,1)$ y $(0,3,-1)$ sean ortogonales respecto al producto escalar definido por f.

(iii) Para $a = 4$ y con respecto al producto escalar que define f dar una base ortonormal y calcular el ángulo que forman los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$.

(Examen final, mayo 2015)

12.– Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar ordinario. Encontrar la matriz F, en la base canónica, de un endomorfismo simétrico f de $\mathbb{R}^3$, sabiendo que el núcleo de f es el subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$ y 3 es autovalor doble de f.

(Examen final, setiembre 2002)

13.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, respecto de la base canónica, la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, \quad y + 2z = 0\}.$$

¿Cuál es la proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre el subespacio U?.

(Examen final, julio 2015)

14.– Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de un producto escalar, sabiendo que:

- $B = \{(1,0),(1,-3)\}$ es una base ortogonal.

- Los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ forma un ángulo de 30 grados.

- $\|(1,0)\| = \sqrt{3}$.

(Examen final, julio 2024)

ÁLGEBRA LINEAL II — Problemas adicionales.

Espacios Euclídeos. Ortogonalidad (Curso 2024–2025)

I.– En un espacio vectorial real V de dimensión 3 se considera una cierta base $B = \{\bar{e}_i\}$. Hallar, en esa base, la matriz métrica G de un producto escalar definido en V del que se sabe que:

(a) El módulo de $\bar{e}_1$ es $\sqrt{2}$ y el de $\bar{e}_2$ es $\sqrt{3}$.

(b) El subespacio vectorial U, definido por la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ en la base B, es ortogonal a la envolvente de $\bar{e}_1$.

(c) La proyección ortogonal de $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ sobre la envolvente de $\bar{e}_2$ es $3\bar{e}_2$.

(d) El vector $\bar{e}_3$ es ortogonal a alguno del conjunto $C = \{(2,2,0), (2,0,-1), (0,2,-1)\}$, cuyos elementos vienen dados por sus coordenadas en la base B.

(Examen final, junio 1998)

II.– En un espacio vectorial V de dimensión n, se considera una forma bilineal f cuya matriz en una determinada base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es A^2, siendo A una matriz real $n \times n$, no singular y simétrica. Demostrar que f es un producto escalar. Encontrar, en función de $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, una base ortonormal para f.

III.– Sea un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita, y dos subespacios cualesquiera suyos U_1 y U_2. Comprobar que:

(a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

(b) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

IV.– En $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una determinada base $\{\bar{e}_i\}$ se definen el producto escalar

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1$$

y el endomorfismo f que verifica: $f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1$, $f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$, $f(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_3$. ¿Es f un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar dado arriba? En caso afirmativo, dar una base ortonormal en la que la matriz de f sea diagonal.

V.– En un espacio euclídeo V se tienen dos subespacios suplementarios V_1 y V_2. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2 sea simétrica es que V_1 y V_2 sean ortogonales.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VI.– Dada la matriz $n \times n$ A definida por

$$a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

¿es diagonalizable por semejanza ortogonal? En caso de que lo sea, dar una matriz de paso.

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

VII.– En un espacio euclídeo se consideran los vectores fijos y no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y la aplicación $f(\bar{x}) = (\bar{a} \cdot \bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}$. Se pide:

(a) Ver si f es lineal.

(b) Determinar los autovalores y autovectores.

(c) ¿Qué condición han de cumplir $\bar{a}$ y $\bar{b}$ para que f sea diagonalizable?

(Examen final, junio 1997)

VIII.– Se considera el espacio vectorial real E de las funciones continuas $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ y la aplicación

$$\begin{array}{rcl} p : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longrightarrow & \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx. \end{array}$$

(a) Demostrar que esta aplicación dota a E de la estructura de espacio vectorial euclídeo.

(b) Si llamamos U al subespacio vectorial generado por $\{1, \text{sen}x, \cos x, \text{sen}^2 x\}$, encontrar una base ortogonal de U usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

IX.– Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "El conjunto formado por dos vectores no nulos y ortogonales entre sí es un sistema libre".

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

X.– Consideramos los productos escalares en $\mathbb{R}^2$ cuyas matrices de Gram respecto de la base canónica son G_1 y G_2. Sabiendo que $G_1 = \lambda G_2$ con $\lambda \in R$, $\lambda > 1$, probar que los dos productos escalares definen la misma medida sobre ángulos de vectores, pero distinta en longitudes.

(Examen final, septiembre 2008)

XI.– En el espacio de matrices $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ consideramos las formas bilineales:

$$f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(A, B) = traza(AB^t)$$
$$g : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(A, B) = traza(AB)$$

(a) Estudiar si son simétricas.

(b) Probar que para $n \geq 2$, f define un producto escalar, pero g no. ¿Qué ocurre para $n = 1$?.

(c) Para $n = 2$ calcular la matriz asociada a g respecto de la base canónica, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada.

(d) Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f, calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio de matrices simétricas.

(e) Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f, hallar una base ortonormal del subespacio generado por las matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(f) Para cualquier $n > 2$, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada a g.

(Segundo parcial, junio 2009)
