ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 1.1

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas — (Curso 2018–2019)

1.– Comprobar si las siguientes aplicaciones son o no bilineales y en las que resulten serlo, dar la matriz que las representa en las bases canónicas correspondientes. Decidir también si las formas bilineales son simétricas o antisimétricas.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_2 - 3x_1y_1$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$

(c) $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 4x_1y_2 + 1 - x_2y_1 + 5x_3y_1$

(d) $l : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l(A, B) = \mathrm{tr}AB$

(e) $m : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad m(p, q) = p(1)q(-1) - p(-1)q(1)$

2.– Dada la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$:

(i) Clasificarla indicando su rango y signatura.

(ii) Hallar una base de vectores conjugados.

(iii) Hallar los vectores autoconjugados, expresándolos de la manera más sencilla posible (dar el resultado respecto de la base canónica).

(iv) Calcular la matriz asociada a w en la base:

$$B = \{(1, 1), (1, -1)\}$$

(v) Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((2, 1), (1, 3))$.

3.– Dada la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$w(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2$.

(i) Calcular la matriz asociada a w en la base canónica. Clasificar la forma cuadrática indicando su rango y signatura.

(ii) Calcular una base de vectores conjugados.

(iii) Hallar los vectores autoconjugados descomponiéndolos, si es posible, como unión de dos planos.

(iv) Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

(Examen final, julio 2018)

4.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx - 2p(0)q(0).$$

(i) Probar que f es una forma bilineal simétrica.

(ii) Calcular la matriz asociada a f en al base canónica.

(iii) Dar un conjunto de polinomios que forme una base de vectores conjugados.

(iv) Calcular los polinomios autoconjugados.

(v) Clasificar la forma cuadrática asociada a f.

(Examen final, julio 2012)

5.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma cuadrática w cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Clasificar la forma cuadrática en función de a, indicando su rango y signatura.

(ii) Para $a = 1$ calcular una base de vectores conjugados.

(iii) Para $a = 0$ calcular los vectores autoconjugados.

(iv) ¿Para qué valores de a la forma bilineal asociada a w es un producto escalar?.

(Examen final, julio 2017)

6.– En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma cuadrática dada por:

$$w(x, y, z) = ax^2 + y^2 + 4xy + 2axz.$$

(i) Clasificarla en función de a indicando además en cada caso su rango y signatura.

(ii) Para $a = 0$ hallar los vectores autoconjugados, expresándolos si es posible como unión de dos planos.

(Examen parcial, febrero 2015)

7.– En $\mathbb{R}^3$ y dados $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la forma bilineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x, y, z),(x', y', z')) = xx' + axy' + xz' + ayx' + yy' + yz' + bzx' + zy' + 2zz'$$

(i) ¿Para qué valores de a y b es f una forma bilineal simétrica?.

(ii) Para los valores determinados en el apartado anterior clasificar la forma cuadrática asociada a f indicando además su rango y signatura.

(iii) Para $a = 0$ y $b = 1$ determinar los vectores autoconjugados.

(iv) Para $a = 2$ dar una base de vectores conjugados.

(v) Para $a = 1$ y $b = 0$ hallar la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1, 0, 1),(1, 1, 1),(1, 0, 0)\}$.

(Examen final, julio 2016)

8.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que:

- $B = \{(1, 0, 1),(1, 0, 0),(0, 1, 0)\}$ es una base de vectores conjugados.

- $(1, 2, 3)$ es autoconjugado, $(1, 0, 1) \in ker(w)$ y $w(2, 1, 0) = 3$.

(i) Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática indicando además su rango y signatura.

(iii) Si f es la forma polar asociada a w calcular $f((1, 1, 0),(0, 1, 1))$.

(iv) Hallar, si existe, una base B' tal que la matriz asociada a w en tal base sea:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Examen final, mayo 2014)

9.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales. Consideramos la forma bilineal:

$$\phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx$$

(i) Probar que ϕ es simétrica.

(ii) Hallar la matriz asociada a ϕ respecto de la base canónica.

(iii) Calcular el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a ϕ.

(iv) Encontrar una base de polinomios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respecto de la cual la matriz asociada a ϕ sea diagonal.

Notación: $p'(x), q'(x)$ denotan respectivamente las derivadas de $p(x), q(x)$.

(Examen final, mayo 2011)

10.– Sea $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrárica. Se sabe que:

- Los vectores $\{(1,1,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$ son una base de vectores conjugados.
- w tiene rango 1.
- $(0,1,0)$ es un vector autoconjugado.
- $w(1,2,0) = 1$.

i) Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.

ii) Clasificar w.

iii) Hallar todos los vectores autoconjugados de w.

(Examen final, julio 2013)

11.– Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y w su forma cuadrática asociada. Se dispone de la siguiente información:

- Los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,0)$ son conjugados.
- $w(1,0,1) = 1$ y $w(0,1,0) = -1$.
- $ker(f) = \mathcal{L}\{(0,1,1)\}$.

(i) Calcular la matriz asociada a w respecto de la base canónica.

(ii) Clasificar la correspondiente forma cuadrática indicando además su rango y signatura.

(iii) Hallar una base de vectores conjugados.

(iv) Hallar el conjunto de vectores autoconjugados, indicando si es posible los subespacios en los que se divide. Expresar los resultados respecto de la base canónica.

(Examen final, mayo 2016)

12.– Sea $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $u, v \in \mathbb{R}^n$ verificando $w(u) = 1, w(v) = -1$. Probar que $\{u, v\}$ son linealmente independientes. ¿Es necesariamente w una forma cuadrática indefinida?.

(Examen final, junio 2009)

13.– En cada uno de los siguientes apartados dar una matriz no diagonal asociada a una forma cuadrática w de $\mathbb{R}^2$ que cumpla además la condición indicada (justificar las respuestas).

(i) w es definida positiva.

(ii) w es semidefinida negativa.

(iii) w es indefinida.

(Examen final, mayo 2017)

14.– Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Una forma cuadrática definida positiva nunca tiene vectores autoconjugados no nulos.

(ii) La matriz asociada a una forma cuadrática definida negativa siempre tiene determinante negativo.

(iii) Una forma cuadrática indefinida siempre tiene vectores autoconjugados no nulos.

(iv) La suma de una forma cuadrática indefinida y una definida positiva nunca es definida negativa.

(Examen final, julio 2014)

15.– Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si w es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ de rango 1 entonces no puede ser indefinida.

(ii) Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = 0$ entonces w es semidefinida positiva.

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = -1$ entonces w es indefinida.

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ pueden ser matrices asociadas a una misma forma cuadrática respecto a diferentes bases.

(v) Si $A \in \mathcal{M}_{2015\times 2015}(\mathbb{R})$ es la matriz asociada a una forma cuadrática semidefinida negativa, entonces $det(A) < 0$.

(Examen parcial, mayo 2015)

I.– Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo K y $f, g : E \longrightarrow K$ lineales. Se define la aplicación $\phi : E \times E \longrightarrow K$, $\quad \phi(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x})g(\bar{y})$.

(a) Demostrar que ϕ es bilineal.

(b) Determinar la matriz de ϕ en una base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ en función de las matrices de f y g en esa misma base.

(c) ¿Es ϕ simétrica? ¿Es antisimétrica?

II.– En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, hallar la expresión matricial en la base canónica de una forma cuadrática que cumple que:

- el vector $(1, 1, 0)$ es autoconjugado,
- el vector $(2, 0, 1)$ pertenece al núcleo,
- la forma cuadrática aplicada en $(0, 1, 0)$ da 2 y
- la forma polar asociada a esta forma cuadrática aplicada en los vectores $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$ da -1.

(Examen extraordinario, septiembre 2001)

III.– De una forma cuadrática ω en $\mathbb{R}^3$ se sabe:

- es semidefinida positiva.
- el vector $(1, 0, 1)$ pertenece al núcleo.
- el vector $(0, 1, 1)$ es autoconjugado.
- la forma cuadrática aplicada sobre el vector $(1, 1, 1)$ vale 1.

Hallar la matriz asociada a ω respecto de la base canónica.

(Examen final, septiembre 2010)

IV.– Fijados $a, b \in \mathbb{R}$ se definie la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z, t) = x^2 + ay^2 + 2bxy + 2byt + 2bzt$$

(i) Hallar el rango, signatura y clasificar w en función de los valores a y b.

(ii) Para aquellos valores para los cuáles la forma cuadrática es degenerada calcular una base del núcleo.

(iii) Si $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a w, para $a = b = 1$ calcular $f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$.

(Examen final, julio 2012)

V.– En coordenadas referidas a una determinada base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, una forma cuadrática ω tiene la expresión $\omega(x,y) = x^2+2xy-y^2$. ¿Existe alguna base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con respecto a cuyas coordenadas la expresión de ω sea $\omega(u,v) = 2uv+v^2$? En caso afirmativo, dar la nueva base en función de la anterior.

VI.– Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ como,

$w(x,y,z) = x^2 + 2axy + 4axz + az^2$.

(i) Calcular la matriz asociada a w en la base canónica y en la base $B = \{(1,0,1), (0,0,1), (-1,0,1)\}$.

(ii) Clasificar la forma cuadrática en función de los valores de a, indicando su rango y signatura.

(iii) Para $a = 1$ calcular una base de vectores conjugados.

(iv) Para $a = 0$ calcular el núcleo de w y los vectores autoconjugados.

(Examen final, mayo 2018)

VII.– Dado el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, definimos la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)$$

i) Probar que f es una forma bilineal simétrica.

ii) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

iii) Escribir tres polinomios formando una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

iv) Indicar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f.

(Examen final, diciembre 2009)

VIII.– En $\mathbb{R}^3$ hallar la matriz con respecto a la base canónica $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de una aplicación bilineal f verificando:

- f es simétrica.

- $f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = f(\bar{e}_3, \bar{e}_3)$.

- Los vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ son conjugados.

- $f(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2, \bar{e}_3) = y$.

- La forma cuadrática asociada a f y restringida al subespacio $\mathcal{L}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tiene rango 1 y restringida al subespacio $\mathcal{L}\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es semidefinida negativa.

IX.– Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4 y $B = \{\bar{e}_i\}$ una base de E. Se considera la forma cuadrática ω cuya expresión en función de las coordenadas referidas a B es

$$\omega(\bar{x}) = 2(x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 2(x_4)^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - 4x_3x_4.$$

(a) Clasificar la forma cuadrática y diagonalizarla por suma de cuadrados.

(b) Determinar un subespacio vectorial de E de dimensión máxima tal que la restricción de ω a él sea una forma cuadrática semidefinida negativa.

X.– Consideremos la forma cuadrática ω de $\mathbb{R}^4$ que en la base canónica viene dada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el rango y la signatura de ω.

(b) Calcular, si existe, un vector distinto del nulo que sea autoconjugado.

(c) Considérese el subespacio vectorial

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \; x - y + 2z = z + t = 0\}$$

y la restricción Ω de ω a V. Hallar una base de V y la matriz asociada a Ω en dicha base.

(Examen final, junio 2001)

XI.– En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, para cada $a \in R$, se considera la aplicación dada por:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow R, \quad f(p(x), q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a)$$

i) Probar que es una forma bilineal simétrica.

ii) Estudiar para que valores de a el conjunto $B_a = \{(x-a)^2, x^2, (x+a)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

iii) Para aquellos valores de a para los que tenga sentido, hallar la matriz asociada a f con respecto a la base B_a

iv) Hallar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f en función del parámetro a.

(segundo parcial, mayo 2010)

XII.– Sean $w_1, w_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos forma cuadráticas semidefinidas positivas. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) $w_1 + w_2$ es semidefinida positiva.

(ii) $-w_1 - w_2$ no es indefinida.

(iii) $w_1 + w_2$ es definida positiva.

(Examen final, mayo 2011)

XIII.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y referido a la base canónica, se considera la familia de formas cuadráticas:

$$\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \omega(x, y, z) = ax^2 + by^2 + az^2 - 2xz, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Clasificar las formas cuadráticas en función de a y b.

(Examen final, septiembre 2005)

XIV.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la familia de formas cuadráticas $\omega_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que en la base canónica tienen la siguiente expresión:

$$\omega_a(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 2axy + 2xz - 2yz, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificarlas en función del parámetro a.

(Examen final, junio 2005)

XV.– Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Supongamos que

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Se verifica que $f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = a + 1$.

(ii) Si $a = -2$, entonces f es antisimétrica.

(iii) Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$.

(Examen final, mayo 2012)