

1.— Comprobar si las siguientes aplicaciones son o no bilineales y en las que resulten serlo, dar la matriz que las representa en las bases canónicas correspondientes. Decidir también si las formas bilineales son simétricas o antisimétricas.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = 2x^1y^2 - 3x^1y^1$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = x^1x^2 + y^1y^2$

(c) $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h((x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3)) = 5x^1y^1 + 4x^1y^2 + 1 - x^2y^1 + 5x^3y^1$

(d) $l : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l(A, B) = \text{tr} AB$

(e) $m : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad m(p, q) = p(1)q(-1) - p(-1)q(1)$

2.— Dada la forma bilineal f definida en $\mathbb{R}^3$

$$f((x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3)) = x^1y^1 - x^2y^2 + 2x^1y^3$$

se pide construir la matriz de f en la base de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

y mostrar que f no es simétrica, dando dos vectores $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(\bar{x}, \bar{y}) \neq f(\bar{y}, \bar{x})$.

3.— En un espacio vectorial real V y referido a la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, se tiene la forma cuadrática $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\omega(x, y, z) = 3y^2 + z^2 + 6xy - 2xz - 4yz$$

Se pide:

- (a) Una base del núcleo de la forma cuadrática.
- (b) Todos los vectores autoconjugados.

(Segundo examen parcial, junio 2003)

4.— Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx - 2p(0)q(0).$$

- (i) Probar que f es una forma bilineal simétrica.
- (ii) Calcular la matriz asociada a f en la base canónica.
- (iii) Dar un conjunto de polinomios que forme una base de vectores conjugados.
- (iv) Calcular los polinomios autoconjugados.
- (v) Clasificar la forma cuadrática asociada a f .

(Examen final, julio 2012)

5.— En $\mathbb{R}^3$ y dado $a \in \mathbb{R}$ se considera la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z) = x^2 + 5ay^2 + 4z^2 + 2axy + 2ayz.$$

- (i) Clasificar w en función de los valores de a indicando además su rango y signatura.
- (ii) ¿Para qué valores de a existen vectores no nulos autoconjugados?
- (iii) Para $a = 5$ encontrar un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $w(\vec{u}) < 0$.

(Examen final, mayo 2013)

6.— En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma cuadrática dada por:

$$w(x, y, z) = ax^2 + y^2 + 4xy + 2axz.$$

- (i) Clasificarla en función de a indicando además en cada caso su rango y signatura.
- (ii) Para $a = 0$ hallar los vectores autoconjugados, expresándolos si es posible como unión de dos planos.

(Examen parcial, febrero 2015)

7.— Fijados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z, t) = x^2 + ay^2 + 2bxy + 2byt + 2bzt$$

- (i) Hallar el rango, signatura y clasificar w en función de los valores a y b .
- (ii) Para aquellos valores para los cuáles la forma cuadrática es degenerada calcular una base del núcleo.
- (iii) Si $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a w , para $a = b = 1$ calcular $f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$.

(Examen final, julio 2012)

8.— En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que:

- $B = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ es una base de vectores conjugados.
- $(1, 2, 3)$ es autoconjugado, $(1, 0, 1) \in \ker(w)$ y $w(2, 1, 0) = 3$.

- (i) Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.
- (ii) Clasificar la forma cuadrática indicando además su rango y signatura.
- (iii) Si f es la forma polar asociada a w calcular $f((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.
- (iv) Hallar, si existe, una base B' tal que la matriz asociada a w en tal base sea:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Examen final, mayo 2014)

9.— Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales. Consideramos la forma bilineal:

$$\phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx$$

- (i) Probar que ϕ es simétrica.
- (ii) Hallar la matriz asociada a ϕ respecto de la base canónica.
- (iii) Calcular el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a ϕ .
- (iv) Encontrar una base de polinomios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respecto de la cual la matriz asociada a ϕ sea diagonal.

Notación: $p'(x), q'(x)$ denotan respectivamente las derivadas de $p(x), q(x)$.

(Examen final, mayo 2011)

10.— Sea $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Se sabe que:

- Los vectores $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ son una base de vectores conjugados.
- w tiene rango 1.
- $(0, 1, 0)$ es un vector autoconjugado.
- $w(1, 2, 0) = 1$.

- i) Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.
- ii) Clasificar w .
- iii) Hallar todos los vectores autoconjugados de w .

(Examen final, julio 2013)

11.— En $\mathbb{R}^3$ hallar la matriz con respecto a la base canónica $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de una aplicación bilineal f verificando:

- f es simétrica.
- $f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = f(\bar{e}_3, \bar{e}_3)$.
- Los vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ son conjugados.
- $f(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2, \bar{e}_3) = y$.
- La forma cuadrática asociada a f y restringida al subespacio $\mathcal{L}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tiene rango 1 y restringida al subespacio $\mathcal{L}\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es semidefinida negativa.

12.— Sea $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $u, v \in \mathbb{R}^n$ verificando $w(u) = 1, w(v) = -1$. Probar que $\{u, v\}$ son linealmente independientes. ¿Es necesariamente w una forma cuadrática indefinida?.

(Examen final, junio 2009)

13.— Sea $f : \mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}^{11} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal antisimétrica. ¿Puede tener la matriz asociada a f rango 11? Razona la respuesta.

(Examen final, diciembre 2009)

14.— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Una forma cuadrática definida positiva nunca tiene vectores autoconjugados no nulos.
- (ii) La matriz asociada a una forma cuadrática definida negativa siempre tiene determinante negativo.
- (iii) Una forma cuadrática indefinida siempre tiene vectores autoconjugados no nulos.
- (iv) La suma de una forma cuadrática indefinida y una definida positiva nunca es definida negativa.

(Examen final, julio 2014)

15.— Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Si w es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ de rango 1 entonces no puede ser indefinida.
- (ii) Si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = 0$ entonces w es semidefinida positiva.
- (iii) Si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = -1$ entonces w es indefinida.
- (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ pueden ser matrices asociadas a una misma forma cuadrática respecto a diferentes bases.
- (v) Si $A \in \mathcal{M}_{2015 \times 2015}(\mathbb{R})$ es la matriz asociada a una forma cuadrática semidefinida negativa, entonces $\det(A) < 0$.

(Examen parcial, mayo 2015)

ÁLGEBRA LINEAL II

Problemas adicionales

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas

(Curso 2015–2016)

I.— Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo K y $f, g : E \longrightarrow K$ lineales. Se define la aplicación $\phi : E \times E \longrightarrow K$, $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x})g(\bar{y})$.

- (a) Demostrar que ϕ es bilineal.
- (b) Determinar la matriz de ϕ en una base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ en función de las matrices de f y g en esa misma base.
- (c) ¿Es ϕ simétrica? ¿Es antisimétrica?

II.— En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, hallar la expresión matricial en la base canónica de una forma cuadrática que cumple que:

- el vector $(1, 1, 0)$ es autoconjugado,
- el vector $(2, 0, 1)$ pertenece al núcleo,
- la forma cuadrática aplicada en $(0, 1, 0)$ da 2 y
- la forma polar asociada a esta forma cuadrática aplicada en los vectores $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$ da -1 .

(Examen extraordinario, septiembre 2001)

III.— De una forma cuadrática ω en $\mathbb{R}^3$ se sabe:

- es semidefinida positiva.
- el vector $(1, 0, 1)$ pertenece al núcleo.
- el vector $(0, 1, 1)$ es autoconjugado.
- la forma cuadrática aplicada sobre el vector $(1, 1, 1)$ vale 1.

Hallar la matriz asociada a ω respecto de la base canónica.

(Examen final, septiembre 2010)

IV.— Clasificar en función de $a \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ cuya expresión con respecto a determinada base es

$$\omega(x, y, z) = ax^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2ayz$$

(Examen final, junio 2003)

V.— En coordenadas referidas a una determinada base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, una forma cuadrática ω tiene la expresión $\omega(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$. ¿Existe alguna base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con respecto a cuyas coordenadas la expresión de ω sea $\omega(u, v) = 2uv + v^2$? En caso afirmativo, dar la nueva base en función de la anterior.

VI.— Consideramos la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ dada por la expresión:

$$\omega(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 2yz$$

Determinar para que valores de α existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la expresión matricial de la forma cuadrática es la matriz identidad.

(Examen final, 2004)

VII.— Dado el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, definimos la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)$$

- i) Probar que f es una forma bilineal simétrica.
- ii) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
- iii) Escribir tres polinomios formando una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal.
- iv) Indicar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f .

(Examen final, diciembre 2009)

VIII.— Se considera la forma cuadrática ω definida en $\mathbb{R}^4$ por la siguiente expresión

$$\omega(x, y, z, t) = ax^2 + y^2 + (a+2)t^2 + 2xy - 2xz + 2xt - 2yz + 2yt - 2zt$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

- a) Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ en la que la matriz de ω sea diagonal.
- b) Clasificar ω en función de $a \in \mathbb{R}$.
- c) Para todos los valores de a que hagan ω degenerada, encontrar ecuaciones de subespacios de dimensión máxima tales que la restricción de ω a ellos sea definida positiva.

(Examen final, septiembre 2007)

IX.— Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4 y $B = \{\bar{e}_i\}$ una base de E . Se considera la forma cuadrática ω cuya expresión en función de las coordenadas referidas a B es

$$\omega(\bar{x}) = 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2(x^4)^2 + 4x^1x^2 - 4x^1x^4 - 2x^2x^3 - 4x^2x^4 - 4x^3x^4.$$

- (a) Clasificar la forma cuadrática y diagonalizarla por suma de cuadrados.
 - (b) Determinar un subespacio vectorial de E de dimensión máxima tal que la restricción de ω a él sea una forma cuadrática semidefinida negativa.
-

X.— Consideremos la forma cuadrática ω de $\mathbb{R}^4$ que en la base canónica viene dada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular el rango y la signatura de ω .
- (b) Calcular, si existe, un vector distinto del nulo que sea autoconjugado.
- (c) Considérese el subespacio vectorial

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 2z = z + t = 0\}$$

y la restricción Ω de ω a V . Hallar una base de V y la matriz asociada a Ω en dicha base.

(Examen final, junio 2001)

XI.— En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, para cada $a \in \mathbb{R}$, se considera la aplicación dada por:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a)$$

- i) Probar que es una forma bilineal simétrica.
- ii) Estudiar para que valores de a el conjunto $B_a = \{(x-a)^2, x^2, (x+a)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- iii) Para aquellos valores de a para los que tenga sentido, hallar la matriz asociada a f con respecto a la base B_a .
- iv) Hallar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f en función del parámetro a .

(segundo parcial, mayo 2010)

XII.— Sean $w_1, w_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos formas cuadráticas semidefinidas positivas. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

- (i) $w_1 + w_2$ es semidefinida positiva.
- (ii) $-w_1 - w_2$ no es indefinida.
- (iii) $w_1 + w_2$ es definida positiva.

(Examen final, mayo 2011)

XIII.— En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y referido a la base canónica, se considera la familia de formas cuadráticas:

$$\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega(x, y, z) = ax^2 + by^2 + az^2 - 2xz, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Clasificar las formas cuadráticas en función de a y b .

(Examen final, septiembre 2005)

XIV.— En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la familia de formas cuadráticas $\omega_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que en la base canónica tienen la siguiente expresión:

$$\omega_a(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 2axy + 2xz - 2yz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificarlas en función del parámetro a .

(Examen final, junio 2005)

XV.— Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Supongamos que

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Se verifica que $f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = a + 1$.
- (ii) Si $a = -2$, entonces f es antisimétrica.
- (iii) Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$.

(Examen final, mayo 2012)
