ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 1.1

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas — (Curso 2012–2013)

1.– Comprobar si las siguientes aplicaciones son o no bilineales y en las que resulten serlo, dar la matriz que las representa en las bases canónicas correspondientes. Decidir también si las formas bilineales son simétricas o antisimétricas.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = 2x^1y^2 - 3x^1y^1$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = x^1x^2 + y^1y^2$

(c) $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h((x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3)) = 5x^1y^1 + 4x^1y^2 + 1 - x^2y^1 + 5x^3y^1$

(d) $l : \mathcal{M}_{2\times 2} \times \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l(A, B) = \mathrm{tr}AB$

(e) $m : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad m(p, q) = p(1)q(-1) - p(-1)q(1)$

2.– Dada la forma bilineal f definida en $\mathbb{R}^3$

$$f((x^1, x^2, x^3),\ (y^1, y^2, y^3)) = x^1y^1 - x^2y^2 + 2x^1y^3$$

se pide construir la matriz de f en la base de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (1, 1, 1)\}$$

y mostrar que f no es simétrica, dando dos vectores $\bar{x},\ \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(\bar{x}, \bar{y}) \neq f(\bar{y}, \bar{x})$.

3.– En un espacio vectorial real V y referido a la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, se tiene la forma cuadrática $\omega : V \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\omega(x, y, z) = 3y^2 + z^2 + 6xy - 2xz - 4yz$$

Se pide:

(a) Una base del núcleo de la forma cuadrática.

(b) Todos los vectores autoconjugados.

(Segundo examen parcial, junio 2003)

4.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx - 2p(0)q(0).$$

(i) Probar que f es una forma bilineal simétrica.

(ii) Calcular la matriz asociada a f en al base canónica.

(iii) Dar un conjunto de polinomios que forme una base de vectores conjugados.

(iv) Calcular los polinomios autoconjugados.

(v) Clasificar la forma cuadrática asociada a f.

(Examen final, julio 2012)

5.– Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y una base B fijada. Se conoce la matriz A asociada a una forma cuadrática ω en función de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el rango y la signatura de ω en función de a.

(b) Para aquellos valores de a para los cuales ω es degenerada, ¿hay algún vector autoconjugado que no esté en el núcleo?. Razona la respuesta.

(Segundo parcial, junio 2007)

6.– Para cada número $a \in \mathbb{R}$, definimos la forma cuadrática $w_a : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$w_a(x, y, z, t) = ax^2 + (1-a)y^2 + az^2 + 2(1-a)xz + 2xt + 2zt + t^2.$$

(i) Clasificar la forma cuadrátrica en función de a, indicando además su rango y signatura.

(ii) Para $a = 1$ dar una base de vectores conjugados respecto de la forma cuadrátrica.

(iii) Para $a = 0$ sea f la forma bilineal simétrica asociada a w_0. Calcular $f((1, 4, 0, 7), (2, 0, 1, 1))$.

(Examen final, julio 2011)

7.– Fijados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z, t) = x^2 + ay^2 + 2bxy + 2byt + 2bzt$$

(i) Hallar el rango, signatura y clasificar w en función de los valores a y b.

(ii) Para aquellos valores para los cuáles la forma cuadrática es degenerada calcular una base del núcleo.

(iii) Si $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a w, para $a = b = 1$ calcular $f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$.

(Examen final, julio 2012)

8.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales. Consideramos la forma bilineal:

$$\phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx$$

(i) Probar que ϕ es simétrica.

(ii) Hallar la matriz asociada a ϕ respecto de la base canónica.

(iii) Calcular el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a ϕ.

(iv) Encontrar una base de polinomios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respecto de la cual la matriz asociada a ϕ sea diagonal.

Notación: $p'(x), q'(x)$ denotan respectivamente las derivadas de $p(x), q(x)$.

(Examen final, mayo 2011)

9.– De una forma cuadrática ω en $\mathbb{R}^3$ se sabe:

- es semidefinida positiva.

- el vector $(1,0,1)$ pertenece al núcleo.

- el vector $(0,1,1)$ es autoconjugado.

- la forma cuadrática aplicada sobre el vector $(1,1,1)$ vale 1.

Hallar la matriz asociada a ω respecto de la base canónica.

(Examen final, septiembre 2010)

10.– En $\mathbb{R}^3$ hallar la matriz con respecto a la base canónica $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de una aplicación bilineal f verificando:

- f es simétrica.

- $f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = f(\bar{e}_3, \bar{e}_3)$.

- Los vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ son conjugados.

- $f(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2, \bar{e}_3) = y$.

- La forma cuadrática asociada a f y restringida al subespacio $\mathcal{L}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tiene rango 1 y restringida al subespacio $\mathcal{L}\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es semidefinida negativa.

11.– Sea $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $u, v \in \mathbb{R}^n$ verificando $w(u) = 1, w(v) = -1$. Probar que $\{u, v\}$ son linealmente independientes. ¿Es necesariamente w una forma cuadrática indefinida?.

(Examen final, junio 2009)

12.– Sea $f : \mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}^{11} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal antisimétrica. ¿Puede tener la matriz asociada a f rango 11?.Razona la respuesta.

(Examen final, dicimbre 2009)

13.– Sean $w_1, w_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos forma cuadráticas semidefinidas positivas. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) $w_1 + w_2$ es semidefinida positiva.

(ii) $-w_1 - w_2$ no es indefinida.

(iii) $w_1 + w_2$ es definida positiva.

(Examen final, mayo 2011)

14.– Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Supongamos que

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Se verifica que $f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = a + 1$.

(ii) Si $a = -2$, entonces f es antisimétrica.

(iii) Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$.

(Examen final, mayo 2012)

ÁLGEBRA LINEAL II — Problemas adicionales

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas — (Curso 2012–2013)

I.– Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo K y $f, g : E \longrightarrow K$ lineales. Se define la aplicación $\phi : E \times E \longrightarrow K, \quad \phi(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x})g(\bar{y})$.

(a) Demostrar que ϕ es bilineal.

(b) Determinar la matriz de ϕ en una base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ en función de las matrices de f y g en esa misma base.

(c) ¿Es ϕ simétrica? ¿Es antisimétrica?

II.– En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, hallar la expresión matricial en la base canónica de una forma cuadrática que cumple que:

- el vector $(1, 1, 0)$ es autoconjugado,
- el vector $(2, 0, 1)$ pertenece al núcleo,
- la forma cuadrática aplicada en $(0, 1, 0)$ da 2 y
- la forma polar asociada a esta forma cuadrática aplicada en los vectores $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$ da -1.

(Examen extraordinario, septiembre 2001)

III.– Clasificar en función de $a \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ cuya expresión con respecto a determinada base es

$$\omega(x, y, z) = ax^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2ayz$$

(Examen final, junio 2003)

IV.– En coordenadas referidas a una determinada base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, una forma cuadrática ω tiene la expresión $\omega(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$. ¿Existe alguna base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con respecto a cuyas coordenadas la expresión de ω sea $\omega(u, v) = 2uv + v^2$? En caso afirmativo, dar la nueva base en función de la anterior.

V.– Consideramos la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ dada por la expresión:

$$\omega(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 2yz$$

Determinar para que valores de α existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la expresión matricial de la forma cuadrática es la matriz identidad.

(Examen final, 2004)

VI.– Dado el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, definimos la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)$$

i) Probar que f es una forma bilineal simétrica.

ii) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

iii) Escribir tres polinomios formando una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

iv) Indicar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f.

(Examen final, diciembre 2009)

VII.– Se considera la forma cuadrática ω definida en $\mathbb{R}^4$ por la siguiente expresión

$$\omega(x,y,z,t) = ax^2 + y^2 + (a+2)t^2 + 2xy - 2xz + 2xt - 2yz + 2yt - 2zt$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

a) Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ en la que la matriz de ω sea diagonal.

b) Clasificar ω en función de $a \in \mathbb{R}$.

c) Para todos los valores de a que hagan ω degenerada, encontrar ecuaciones de subespacios de dimensión máxima tales que la restricción de ω a ellos sea definida positiva.

(Examen final, septiembre 2007)

VIII.– Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4 y $B = \{\bar{e}_i\}$ una base de E. Se considera la forma cuadrática ω cuya expresión en función de las coordenadas referidas a B es

$$\omega(\bar{x}) = 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2(x^4)^2 + 4x^1x^2 - 4x^1x^4 - 2x^2x^3 - 4x^2x^4 - 4x^3x^4.$$

(a) Clasificar la forma cuadrática y diagonalizarla por suma de cuadrados.

(b) Determinar un subespacio vectorial de E de dimensión máxima tal que la restricción de ω a él sea una forma cuadrática semidefinida negativa.

IX.– Consideremos la forma cuadrática ω de $\mathbb{R}^4$ que en la base canónica viene dada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el rango y la signatura de ω.

(b) Calcular, si existe, un vector distinto del nulo que sea autoconjugado.

(c) Considérese el subespacio vectorial

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ x - y + 2z = z + t = 0\}$$

y la restricción Ω de ω a V. Hallar una base de V y la matriz asociada a Ω en dicha base.

(Examen final, junio 2001)

X.– En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, para cada $a \in R$, se considera la aplicación dada por:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow R, \quad f(p(x), q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a)$$

i) Probar que es una forma bilineal simétrica.

ii) Estudiar para que valores de a el conjunto $B_a = \{(x-a)^2, x^2, (x+a)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

iii) Para aquellos valores de a para los que tenga sentido, hallar la matriz asociada a f con respecto a la base B_a

iv) Hallar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f en función del parámetro a.

(segundo parcial, mayo 2010)

XI.– Sean a y b dos números reales. En el espacio $\mathcal{P}_1$ de los polinomios de grado menor o igual que 1 y coeficientes reales se define la siguiente forma bilineal simétrica.

$$f(p,q) = p(a)q(a) + p(b)q(b).$$

(a) Encontrar la matriz de f en la base canónica de $\mathcal{P}_1$.

(b) Encontrar una base de vectores conjugados para f.

(c) Clasificar f.

(Examen final, junio 2007)

XII.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y referido a la base canónica, se considera la familia de formas cuadráticas:

$$\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \omega(x,y,z) = ax^2 + by^2 + az^2 - 2xz, \qquad a,b \in \mathbb{R}.$$

Clasificar las formas cuadráticas en función de a y b.

(Examen final, septiembre 2005)

XIII.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la familia de formas cuadráticas $\omega_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que en la base canónica tienen la siguiente expresión:

$$\omega_a(x,y,z) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 2axy + 2xz - 2yz, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificarlas en función del parámetro a.

(Examen final, junio 2005)
