

Álgebra Lineal II

TEMA II- Espacios vectoriales euclídeos.

Capítulo 3. Transformaciones ortogonales.

Orientación de una base.

Luis Fuentes García (2022).



Introducción: signo de un ángulo y sentido de giro.

En un **espacio vectorial euclídeo** sabemos medir el **ángulo** entre dos vectores:

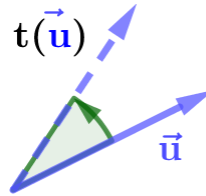
$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}\right)$$

Problema: como $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ **NO** nos permite **distinguir** el **signo** del **ángulo**.

Por ejemplo, es bien **distinto**

$$t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

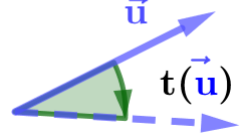
Giro de $+30^\circ$



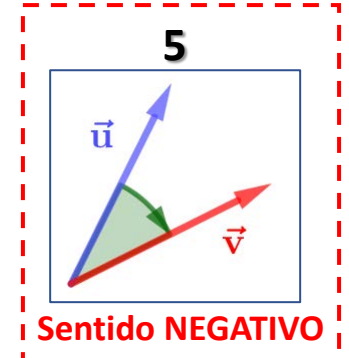
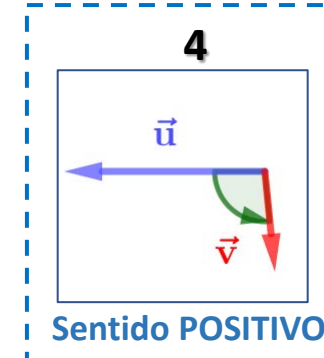
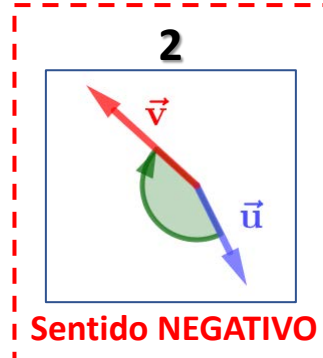
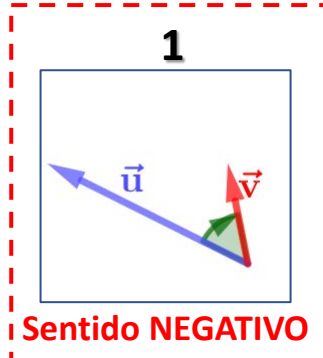
de

$$t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Giro de -30°



Intuitivamente es fácil distinguir el sentido de giro.



Importante. Es un **criterio relativo**, es decir, sabemos distinguir cuando **dos pares de vectores** definen el **mismo sentido**.

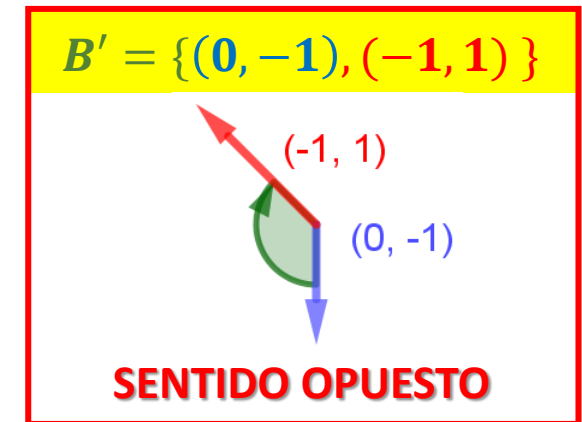
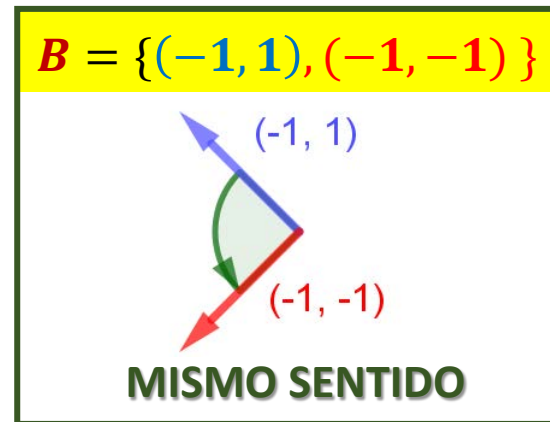
Objetivo. Dar un **método algebraico** para formalizar y distinguir **sentidos de giro** y el **signo de un ángulo**.



Orientación relativa de dos bases.

Dadas dos bases $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ queremos un criterio para decidir si definen el mismo sentido de giro.

Por ejemplo:



Definición. Dos bases B y B' definen la **misma orientación** si $\det(M_{BB'}) > 0$.

¿Las bases C y B definen la **misma orientación**?

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{CB}) = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 > 0$$

¡MISMA ORIENTACIÓN!

¿Las bases C y B' definen la **misma orientación**?

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{CB'}) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$$

¡ORIENTACIÓN OPUESTA!



Orientación relativa de dos bases.

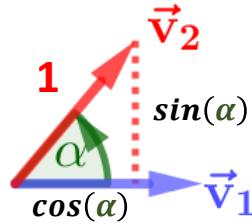
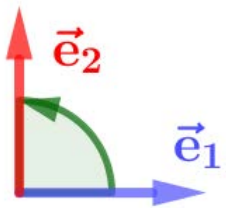
Dadas dos bases $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ queremos un criterio para decidir si definen el mismo sentido de giro.

Definición. Dos bases B y B' definen la **misma orientación** si $\det(M_{BB'}) > 0$.

IDEA de porque funciona: caso particular.

$$C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$$

$$B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$



$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 = (1, 0)_C$$

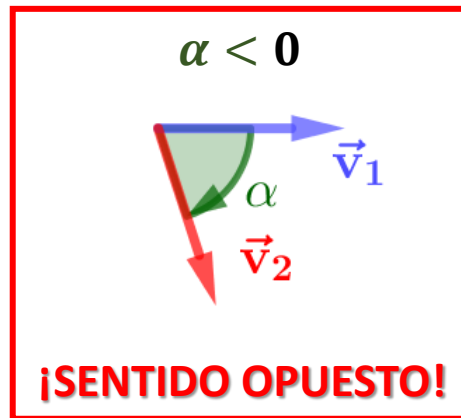
$$\vec{v}_2 = \cos(\alpha)\vec{e}_1 + \sin(\alpha)\vec{e}_2 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))_C$$

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{CB'}) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \sin(\alpha)$$



$$\sin(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$$



$$\sin(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha < 0$$

$$\sin(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$$

$$\sin(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha < 0$$



Orientación relativa de dos bases: propiedades (I).

Definición. Dos bases B y B' definen la **misma orientación** si $\det(M_{BB'}) > 0$.

Propiedades:

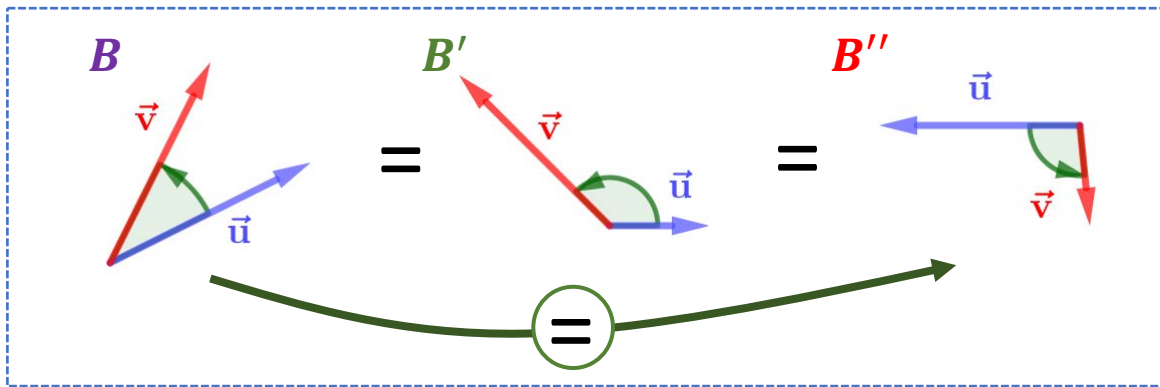
1) **Reflexiva.** Toda base tiene la **misma orientación** que si misma. $\det(M_{BB}) = \det(Id) = 1 > 0$

2) **Simétrica.** Si B tiene la **misma orientación** que B' , entonces B' tiene la **misma orientación** que B .

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \det(M_{BB'}) > 0 \end{array}$$

$$\det(M_{B'B}) = \det(M_{BB'}^{-1}) = \det(M_{BB'})^{-1} > 0$$

3) **Transitiva.** $\left. \begin{array}{l} B \text{ tiene la misma orientación que } B' \\ B' \text{ tiene la misma orientación que } B'' \end{array} \right\} \Rightarrow B \text{ tiene la misma orientación que } B''$



B tiene la **misma orientación** que $B' \Leftrightarrow \det(M_{BB'}) > 0$

B' tiene la **misma orientación** que $B'' \Leftrightarrow \det(M_{B'B''}) > 0$

$$M_{BB''} = M_{BB'} M_{B'B''} \Rightarrow \det(M_{BB''}) = \det(M_{BB'}) \det(M_{B'B''}) > 0$$

> 0 > 0

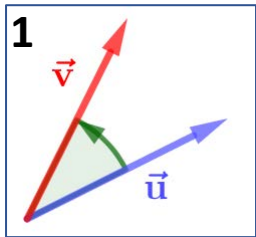


Orientación relativa de dos bases: propiedades (II).

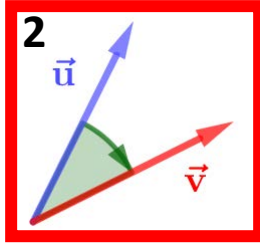
Definición. Dos bases B y B' definen la **misma orientación** si $\det(M_{BB'}) > 0$.

Propiedades:

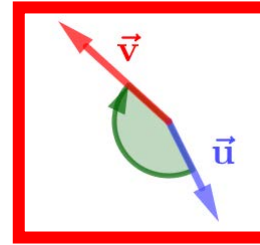
4) Sólo hay dos orientaciones.



$\neq$



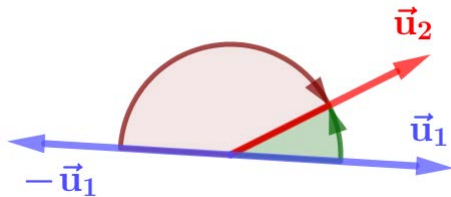
otra base



ó tiene la **orientación de 1** ó tiene la **orientación de 2**

$$B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$$

$$B_2 = \{-\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$$



$$M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{B_1 B_2}) = -1 < 0$$

B_1 y B_2 orientaciones distintas

$$B_3 \text{ otra base } \begin{cases} \det(M_{B_1 B_3}) > 0 & \text{Misma orientación que } B_1 \\ \det(M_{B_1 B_3}) < 0 & \Rightarrow \det(M_{B_2 B_3}) = \underbrace{\det(M_{B_2 B_1})}_{< 0} \underbrace{\det(M_{B_1 B_3})}_{< 0} > 0 \Rightarrow \text{Misma orientación que } B_2 \end{cases}$$



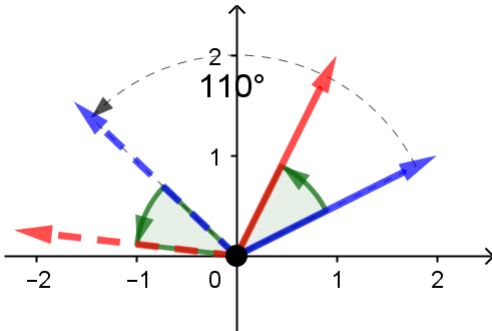
Transformaciones directas e inversas.

6. Si $t: U \rightarrow U$ es una **transformación ortogonal** entonces $\det(T_B) = \pm 1$

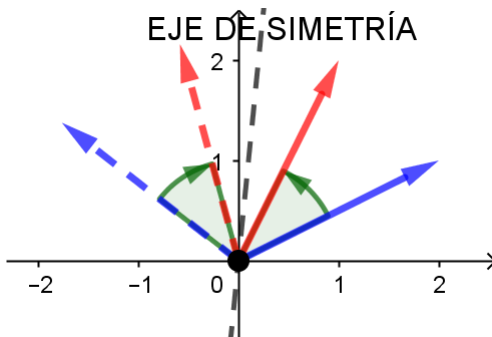
$\det(T_B) = +1 \Leftrightarrow$ transformación **DIRECTA** $\Leftrightarrow$ **conserva orientación** $\Leftrightarrow$ **pueden hacerse en la realidad**

$\det(T_B) = -1 \Leftrightarrow$ transformación **INVERSA** $\Leftrightarrow$ **invierte orientación** $\Leftrightarrow$ **NO pueden hacerse en la realidad (sin reflexión)**

Giro de 110° : DIRECTA



Simetría respecto RECTA: INVERSA



Prueba:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$$

$$B' = t(B) = \{t(\vec{u}_1), t(\vec{u}_2), \dots, t(\vec{u}_n)\}$$

Matriz cuyas columnas son las coordenadas de la imagen de los vectores de la base B respecto de la base B

$$T_B = T_{BB} = \left((t(\vec{u}_1))_B \mid (t(\vec{u}_2))_B \mid \dots \mid (t(\vec{u}_n))_B \right) = M_{BB'}$$

Matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $B' = t(B)$ respecto de la base B

$$\det(T_B) = \det(M_{BB'}) \text{ mismo signo}$$

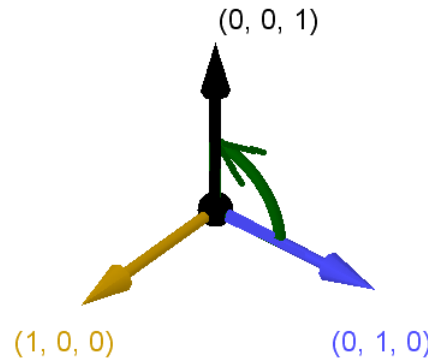


Significado de la orientación de una base en 3D.

Dos bases $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ tienen la **misma orientación** si al **superponer** $\vec{u}_1$ y $\vec{v}_1$ el sentido de giro desde el **segundo** al **tercer** vector es el mismo.

Ejemplo. Fijamos la referencia para orientación **positiva**: la base canónica.

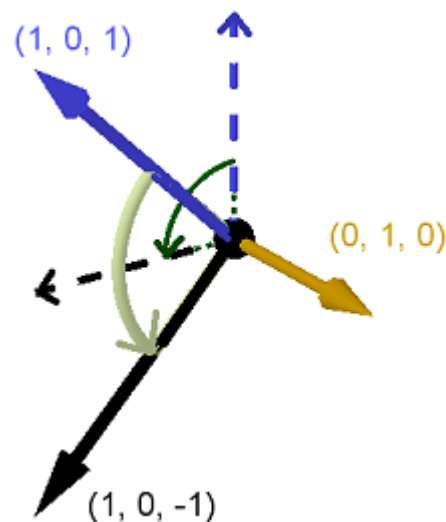
$$C = \{(\mathbf{1}, 0, 0), (0, \mathbf{1}, 0), (0, 0, \mathbf{1})\}$$



$$B_1 = \{(\mathbf{0}, \mathbf{1}, 0), (\mathbf{1}, 0, \mathbf{1}), (1, 0, -1)\}$$

$$M_{CB_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

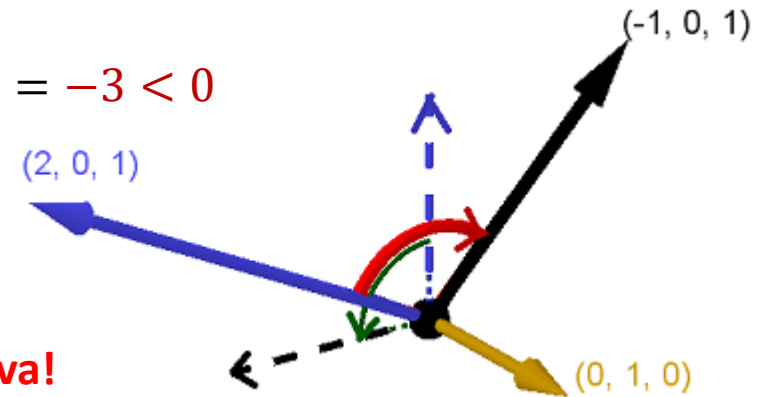
¡Orientación positiva!



$$B_2 = \{(\mathbf{0}, \mathbf{1}, 0), (\mathbf{2}, 0, \mathbf{1}), (-1, 0, \mathbf{1})\}$$

$$M_{CB_1} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

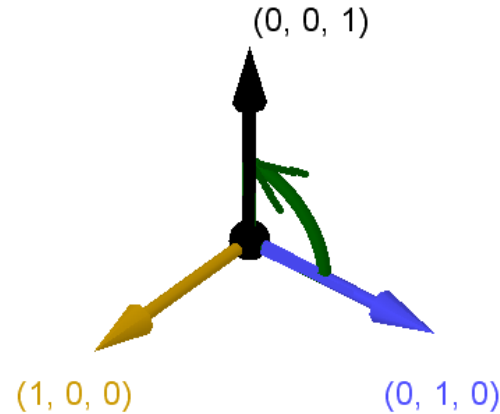
¡Orientación negativa!



Significado de la orientación de una base en 3D.

Ejemplo. Fijamos la referencia para orientación **positiva**: la base canónica.

$$C = \{(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})\}$$



Para definir un giro en el espacio **NO llega dar un eje de giro**. Es necesario un **SEMIEJE**.

