

Álgebra Lineal II

TEMA I- Aplicaciones bilineales y tensores homogéneos.

Capítulo 2. Dualidad y tensores homogéneos.

Notación tensorial.

Luis Fuentes García.



Notación de Einstein.

Idea: simplificar la notación donde aparecen sumas y sumatorios de varios términos.

Ejemplo: Coordenadas de un **vector** respecto a una **base**.

Base de un e.v. U : $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$

$$\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = x_i \vec{e}_i$$

$$\vec{v} = x_i \vec{e}_i$$

Convenio de Einstein: si en una expresión aparece un **término** con un **índice repetido dos veces** que no ha sido previamente fijado, se considera que **se está sumando sobre todos los posibles valores del índice**. Los límites concretos vienen dados por el contexto.

Otros ejemplos:

Producto de matriz por vector: $\begin{cases} A \in M_{m \times n} \\ \vec{u} \in R^n \\ \vec{v} = A \cdot \vec{u} \in R^m \end{cases}$

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j = a_{ij} u_j$$

$$v_i = a_{ij} u_j$$

Producto de matrices: $\begin{cases} A \in M_{m \times n} \\ B \in M_{n \times p} \\ C = A \cdot B \in M_{m \times p} \end{cases}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj}$$

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

Producto de dos vectores por una matriz: $\begin{cases} A \in M_{n \times n} \\ \vec{u}, \vec{v} \in R^n \end{cases}$

$$\vec{u}^t A \vec{v} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i a_{ij} v_j = u_i a_{ij} v_j$$

$$\vec{u}^t A \vec{v} = u_i a_{ij} v_j$$



Cambios de base.

Bases de un e. v. U :

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

$$C = M_{B'B}$$

$$\gamma = M_{B'B}^{-t}$$

Coordenadas de un vector:

CONTRA VARIANTE

COVARIANTE

$$(u')_{B'} = M_{B'B}(u)_B \Rightarrow (u)_{B'} = C(u)_B \Rightarrow u'_i = C_{ij}u_j$$

Coefficientes de una ecuación implícita:

$$\left. \begin{array}{l} (a)(u)_B = 0 \\ (u)_B = M_{BB'}(u')_{B'} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{(a)M_{BB'}}_{(a')} (u')_{B'} = 0 \Rightarrow (a') = (a)M_{BB'} \Rightarrow (a') = (a)M_{B'B}^{-1} \Rightarrow (a') = (a)\gamma^t \Rightarrow \begin{array}{l} a'_j = a_i \gamma_{ij}^t \\ \Downarrow \\ a'_j = a_i \gamma_{ji} \end{array}$$

Matriz un endomorfismo: $f: U \rightarrow U$

$$F_{B'} = M_{B'B} F_B M_{B'B}^{-1} \Rightarrow F_{B'} = C F_B \gamma^t \Rightarrow f'_{ij} = C_{ik} f_{ks} \gamma_{sj}^t \Rightarrow f'_{ij} = C_{ik} f_{ks} \gamma_{js}$$

SEMEJANZA

Matriz asociada a una aplicación bilineal: $f: U \times U \rightarrow R$

$$F_{B'} = M_{BB'}^t F_B M_{BB'} \Rightarrow F_{B'} = M_{B'B}^{-t} F_B M_{B'B}^{-1} \Rightarrow F_{B'} = \gamma F_B \gamma^t \Rightarrow f'_{ij} = \gamma_{ik} f_{ks} \gamma_{sj}^t \Rightarrow f'_{ij} = \gamma_{ik} f_{ks} \gamma_{js}$$

CONGRUENCIA



Tensores.

Bases de un e. v. U :

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

$$C = M_{B'B}$$

$$\gamma = M_{B'B}^{-t}$$

CONTRA VARIANTE

COVARIANTE

Coordenadas de un vector:

$$u'_i = C_{ij} u_j$$

$$u'^i = C^i_j u^j$$

Tensor de 1^{er} orden contravariante

Coeficientes de una ecuación implícita:

$$a'_j = a_i \gamma_{ji}$$

$$a'_j = \gamma^i_j a_i$$

Tensor de 1^{er} orden covariante

Matriz un endomorfismo:

$$f'_{ij} = C_{ik} f^k_s \gamma_{js}$$

$$f'^i_j = C^i_k \gamma^s_j f^k_s$$

Tensor de 2^o orden contra-covariante

Matriz asociada a una f. bilineal:

$$f'_{ij} = \gamma_{ik} f_{ks} \gamma_{js}$$

$$f'^i_j = \gamma^k_i \gamma^s_j f_{ks}$$

Tensor de 2^o orden co-covariante

Carácter tensorial: dado un **e. v. U** un **sistema de coeficientes indexados** que depende de una base y se comporta ante el cambio de base de alguna de las dos maneras indicadas anteriormente, se dice que tiene **carácter tensorial** o directamente se llaman **tensores**.

- Los índices que cambian de base de manera **contravariante** suelen escribirse como **superíndices**.
- Los índices que cambian de base de manera **covariante** suelen escribirse como **subíndices**.
- El **orden del tensor** es el **número de índices** del cuál depende.

