NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el plano afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.

3.– *Dada la cónica $x^2+y^2-2xy+2x-1=0$, se pide:*

(a) *Determinar las rectas tangentes a la cónica desde el origen de coordenadas.*

Tenemos que las matrices de términos cuadráticos y asociada son respectivamente:

$$T=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos la recta polar del origen de coordenadas. Esta corta a la parábola en los puntos de tangencia a la cónica de las rectas que buscamos. La recta polar es:

$$(0,0,1)A(x,y,1)^t=0 \iff x-1=0$$

Intersecamos con la parábola:

$$1+y^2-2y+2-1=0 \iff y^2-2y+2=0 \iff (y-1)^2+1=0$$

No hay soluciones reales. Por tanto no existen rectas tangentes desde el origen.

(b) *Determinar las rectas tangentes a la cónica desde el punto* $(1,1)$.

Calculamos la recta polar desde el punto $(1,1)$:

$$(1,1,1)A(x,y,1)^t=0 \iff x=0$$

Intersecamos con la parábola:

$$y^2-1=0 \iff y=1 \text{ ó } y=-1$$

Ahora calculamos las tangentes en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$:

$$(0,1,1)A(x,y,1)^t=0 \iff y-1=0$$
$$(0,-1,1)A(x,y,1)^t=0 \iff 2x-y-1=0$$

(c) *Determinar la recta tangente a la cónica por el punto* $(0,-1)$.

La hemos calculado en el apartado anterior.

4.– *Se considera la cónica dada por la ecuación:*

$$3y^2 - 4xy + 12x - 14y + 19 = 0$$

c) *Calcular las tangentes exteriores a la cónica pasando por el punto* $(0, 3)$.

Calculamos la recta polar del punto dado. Esta corta a la cónica en los puntos de tangencias de las tangentes pedidas. Luego uniremos esos puntos de cortes con el punto inicial.

La recta polar es:

$$(0, 3, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

Cortamos con la ecuación de la hipérbola:

$$3 - 4x + 12x - 14 + 19 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Obtenemos un único punto de corte $(-1, 1)$. La recta pedida es la que une dicho punto con el $(0, 3)$:

$$\frac{x - 0}{-1 - 0} = \frac{y - 3}{1 - 3} \iff 2x - y + 3 = 0.$$

Observación: Aparece una sola tangente exterior, porque el punto dado está sobre la asíntota $y = 3$. La otra "tangente" exterior sería la propia asíntota.

5-6.– *Para las siguientes cónicas*

(1) $5x^2 + 5y^2 - 4 = 0$

(2) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 6 = 0$

(3) $6y^2 + 8xy - 8x + 4y - 8 = 0$

(4) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 = 0$

(5) $x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0$

(6) $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

(7) $x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 2 = 0$

(8) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6y = 0$

(9) $4x^2 + 4y^2 + 8xy + 4x + 4y + 1 = 0$,

se pide:

(b) *Dar las ecuaciones reducidas de las no degeneradas y las rectas que forman las degeneradas.*

(1) Se trata de una elipse real. En este caso ya nos dan la ecuacin reducida:

$$5x^2 + 5y^2 - 4 = 0.$$

Podemos escribirla como:

$$\frac{x^2}{4/5} + \frac{y^2}{4/5} = 1.$$

(2) Se trata de una elipse imaginaria. Como antes calculamos los autovalores de la matriz T de términos cuadráticos:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = 2 \text{ ó } \lambda = 3$$

Para hallar el término independiente procedemos como en el apartado anterior:

$$\lambda_3 = \frac{det(A)}{det(T)} = \frac{6}{6} = 1$$

La ecuación reducida queda:

$$2x'^2 + 3y'^2 + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x'^2}{1/2} + \frac{y'^2}{1/3} = -1$$

(3) Ahora es una hipérbola. Pero el métdo es el mismo. Podemos simplificar primero la ecuación:

$$6y^2 + 8xy - 8x + 4y - 8 = 0 \Longleftrightarrow 3y^2 + 4xy - 4x + 2y - 4 = 0$$

Calculamos los autovalores de T:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 4 \text{ ó } \lambda = -1$$

Ahora calculamos el término independiente:

$$\lambda_3 = \frac{det(A)}{det(T)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

La ecuación reducida queda:

$$-x'^2 + 4y'^2 + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x'^2 - \frac{y'^2}{1/4} = 1$$

Observación: En el caso de la hipérbola hacemos que el autovalor cuyo signo sea el mismo que el del determinante de la matriz asociada, vaya acompañando al término x'^2. De esta forma los focos estarán situados sobre el eje $O'X'$.

(4) Se trata de dos rectas imaginarias paralelas. En el apartado anterior hemos diagonalizado la matriz asociada de manera que obtenemos la ecuación:

$$x'^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x' - 2\imath)(x' + 2\imath) = 0 \Longleftrightarrow x' - 2\imath = 0 \text{ ó } x' + 2\imath = 0$$

Si nos fijamos en las operaciones elementales que hemos realizado vemos que la matriz de cambio de referencia es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

por tanto deshaciendo el cambio queda que las rectas tienen por ecuaciones:

$$x - 2y - 2\imath = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2y + 2\imath = 0$$

(5) Se trata de dos rectas que se cortan. Como antes podemos diagonalizar la matriz asociada, hallar las rectas en la nueva referencia y luego deshacer el cambio. Pero usaremos otro método. Calculamos el centro, que corresponde a la intersección de ambas rectas. Luego calculamos la intersección de una recta arbritaria con la cónica y obtenemos un punto más de cada una de las rectas que la forman.

Primero el centro:

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y/2 + 1/2 = 0 \\ x/2 - 2y - 1/2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = -1/3$$

Vemos que es el punto $(-1/3, -1/3)$.

Ahora tomamos la recta $x = 0$ y la intersecamos con la cónica. Queda

$$-2y^2 - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ ó } y = -1/2,$$

luego la intersección son los puntos $(0,0)$ y $(0,-1/2)$. La rectas buscadas son las que unen el centro con cada una de estos puntos:

$$\frac{x-0}{-1/3-0} = \frac{y-0}{-1/3-0} \iff x-y=0$$
$$\frac{x-0}{-1/3-0} = \frac{y+1/2}{-1/3+1/2} \iff x+2y+1=0$$

Podemos comprobar que la ecuación de la cónica es precisamente $(x-y)(x+2y+1)=0$.

(6) Se trata de dos rectas imaginarias que se cortan. Podemos proceder como en el caso anterior. Simplemente hay que tener en cuenta que ahora trabajaremos con números complejos.

Calculamos el centro:

$$(x,y,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (0,0,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+2=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x,y)=(-2,0)$$

Intersecamos la recta $x=0$ con la cónica:

$$y^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad (x,y)=(0,2\imath) \text{ ó } (x,y)=(0,-2\imath)$$

Ahora calculamos las rectas que unen estos puntos con la cónica:

$$\frac{x+2}{0+2} = \frac{y-0}{2\imath-0} \iff x+\imath y+2=0$$
$$\frac{x+2}{0+2} = \frac{y-0}{-2\imath-0} \iff x-\imath y+2=0$$

De nuevo podemos ver que la ecuación de la cónica es $(x+\imath y+2)(x-\imath y+2)=0$

(7) Se trata de dos rectas reales paralelas. Podemos actuar como en el caso (4). Pero usemos otro método. Aquí sabemos que hay una recta de centros cuya dirección es la de las rectas que buscamos:

$$(x,y,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -2 \end{pmatrix} = (0,0,t) \quad \Rightarrow \quad x+y-1/2=0$$

Por tanto dichas rectas son de la forma $x+y+a=0$.

Calculamos la intersección de la cónica con una recta arbritaria, p.ej., $x=0$. Obtenemos:

$$y^2-y-2=0 \quad \Rightarrow \quad y=2 \text{ ó } y=-1$$

Por tanto las rectas contienen respectivamente a los puntos $(0,2)$ y $(0,1)$. Son por tanto:

$$x+y-2=0$$
$$x+y+1=0$$

Una vez más podemos comprobar que la ecuación de la cónica es $(x+y-2)(x+y+1)=0$.

(8) Se trata de una parábola. Recordemos que, en su forma reducida $ax^2+2by=0$, la matriz asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

donde a es el autovalor no nulo de la matriz T y $det(A')=det(A)$. Por tanto calculamos los autovalores de T:

$$det(T-\lambda I)=0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=0 \text{ ó } \lambda=5$$

y además:

$$-9 = det(A) = det(A') = -ab^2 = -5b^2 \quad \Rightarrow \quad b = \pm 3\sqrt{5}/5$$

Por tanto la ecuación reducida queda:

$$5x^2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}y = 0$$

(9) Se trata de una recta doble. Necesariamente la ecuación es de la forma

$$(ax + by + c)^2 = 0 \iff a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + 2acx + 2acy + c^2 = 0.$$

Comparando con la ecuación que tenemos, deducimos que la recta es:

$$2x + 2y + 1 = 0$$

También podemos calcular la recta doble teniendo en cuenta que corresponde a recta de centros, es decir, viene dada por la ecuación:

$$(x, y, 1)A = 0$$

Nos quedan tres ecuaciones dependientes. Tomando una sóla de ellas queda:

$$4x + 4y + 2 = 0 \iff 2x + 2y + 1 = 0$$

(c) *En los casos en que existan, determinar: centros, puntos singulares, direcciones asintóticas, asíntotas, ejes, vértices, focos, directrices y excentricidad.*

Los puntos singulares sólo aparecen cuando la cónica está formada por dos rectas que se cortan (el punto singular es la intersección) o por dos rectas coincidentes (el lugar singular es la propia recta). En esos casos ya hemos hallado dichos puntos y los centros.

(1) Se trata de una elipse real que ya est en forma reducida. Por tanto:

- El centro es el origen.

- No tiene puntos singulares, ni direcciones asíntoticas ni asíntotas.

- Los diámetros son todas las rectas pasando por el centro.

- Los ejes (OJO!) son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos. En este caso:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hay un único autovalor 5 con multiplicidad geométrica dos. Por tanto todos los vectores son autovectores y los ejes son las rectas polares de cualquier dirección, es decir, coinciden con los diámetros. Por tanto los ejes son todas las rectas pasando por el centro. Geométricamente corresponde al hecho de que la elipse es una circunferencia ($a = b = \sqrt{4/5}$) y por tanto todos los diámetros son ejes de simetría.

- Los focos están en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, con $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$. Es decir hay un único foco en el origen. Esto corresponde de nuevo al hecho de ser una circunferencia. La excentricidad es cero. La directriz sería la recta polar del foco:

$$(0, 0, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \iff -4 = 0.$$

Es decir no hay directriz; si permitimos usar puntos del infinito veremos que la directriz es la recta de puntos del infinito.

(2) Vimos que se trata de una elipse imaginaria.

El centro se calcula como en cualquier otra cónica:

$$(a,b,1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (0,0,t) \iff \begin{cases} 2a-2=0 \\ 3b+3=0 \end{cases} \iff (a,b)=(1,-1)$$

No tiene puntos singulares, ni asíntotas.

Los ejes corresponden de nuevo a los conjugados de las direcciones de los autovectores de T:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \text{ ó } \lambda = 3$$

Los autovectores son respectivamente $(1,0)$ y $(0,1)$. Por tanto los ejes quedan:

$$\begin{aligned} (1,0,0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff 2x-2=0 \\ (0,1,0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff 3y+3=0 \end{aligned}$$

Lo demás no tiene sentido calcularlo, por ser una elipse imaginaria.

(3) Se trata ahora de una hipérbola. Procedemos como antes. La ecuación reducida vimos que era:

$$-x'^2+4y'^2+1=0 \qquad \iff \qquad x'^2-\frac{y'^2}{1/4}=1$$

Calculamos los autovectores de T y el centro para escribir el cambio de referencia.

Autovalor asociado a -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x+2y=0$$

El autovalor normalizado es $(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Autovalor asociado a 4:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2x-y=0$$

El autovalor normalizado es $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

El centro es:

$$(x,y,1)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = (0,0,t) \quad \Rightarrow \quad (x,y)=(-2,1)$$

Ahora el cambio de referencia es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Entonces, en las coordenadas (x',y') sabemos que:

- El centro es el $(0,0)$.

- Las direcciones asintóticas son $(-2,1)$ y $(2,1)$ y las correspondientes asíntotas $x'+2y'=0$ y $x'-2y'=0$.

- Los ejes son el $x'=0$ e $y'=0$.

- Los vértices (puntos de corte de la cónica con los ejes) el $(1,0)$ y $(-1,0)$.

- Para hallar los focos nos fijamos en que los vértices están sobre el eje $O'X'$. Por tanto los focos son $(c,0)$ y $(-c,0)$, donde $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $a=1$ y $b=1/2$. Quedan $(\sqrt{5}/2,0)$ y $(-\sqrt{5}/2,0)$.

- Las directices son las rectas polares de los focos: $x' = -a^2/c = -2/\sqrt{5}$ y $x' = 2/\sqrt{5}$.

- La excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Para obtener los resultados en la referencia de partida utilizamos la ecuación de cambio de referencia. También podemos hallar algunas de ellas directamente usando la definición:

- El centro es el $(-2, 1)$ (ya lo hemos calculado antes).

- Las direcciones asíntoticas corresponden a la intersección de la cónica con los puntos del infinito:

$$(x, y, 0)A(x, y, 0)^t = 0 \iff 6y^2 + 8xy = 0 \iff y = 0 \text{ ó } 4x + 3y = 0 \iff (1, 0) \text{ ó } (-3, 4)$$

Las asíntotas corresponden a dichas direcciones pasando por el centro. Obtenemos

$$y = 1 \quad \text{y} \quad 4x + 3y + 5 = 0$$

- Los ejes corresponden a los conjugados de los autovectores:

$$(2, -1, 0)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -2x + y - 5 = 0$$
$$(1, 2, 0)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 4x + 8y = 0$$

- Los vértices los hallamos con la ecuación de cambio de referencia. Queda: $(2/\sqrt{5} - 2, -1/\sqrt{5} + 1)$ y $(-2/\sqrt{5} - 2, 1/\sqrt{5} + 1)$.

- Para hallar los focos lo más cómodo es usar las fórmulas de cambio de referencia. Obtenemos: $(-1, 1/2)$ y $(-3, 3/2)$.

- Las directrices son las rectas polares de los focos:

$$(-1, 1/2, 1)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x + y/2 - 3/2 = 0$$
$$(-3, 3/2, 1)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y/2 + 7/2 = 0$$

(4) Vimos que se trataba de dos rectas paralelas imaginarias.

Sabemos que hay una recta de centros:

$$(x, y, 1)A = (0, 0, h) \iff x - 2y = 0$$

No hay puntos singulares (reales) porque de hecho las rectas son imaginarias. Si los habría si trabajásemos con el plano afín imaginario.

El eje corresponde al conjugado de la dirección del autovector asociado al autovalor no nulo de T:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 5$$

El autovalor asociado a 5 es el $(-1, 2)$. Por tanto el eje es:

$$(-1, 2, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \iff -5x + 10y = 0$$

Todo lo demás no tiene sentido calcularlo en este caso.

(5) Vimos que se tratan de dos rectas reales que se cortan.

El centro ya lo hemos calculado $(-1/3, -1/3)$.

El único puntos singular es precisamente la intersección de las dos rectas, es decir, el centro.

Las asíntotas son las dos rectas.

Los ejes corresponden a las bisectrices de dichas rectas. En cualquier caso los calculamos como siempre: tomando los conjugados de las direcciones que marcan los autovectores de T.

Obtenemos que los autovalores son:

$$\frac{-1+\sqrt{10}}{2} \text{ y } \frac{-1-\sqrt{10}}{2}$$

y los correspondientes autovectores:

$$(-1, 3+\sqrt{10}) \text{ y } (3+\sqrt{10}, 1)$$

Por tanto los ejes quedan:

$$\begin{aligned}(-1, 3+\sqrt{10}, 0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff -x + (3+\sqrt{10})y + \frac{2+\sqrt{10}}{3} = 0\\ (3+\sqrt{10}, 1, 0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff (3+\sqrt{10})x + y + \frac{4+\sqrt{10}}{3} = 0\end{aligned}$$

(6) Vimos que eran dos rectas imaginarias que se cortan:

El centro ya lo hemos calculado:

$$(-2, 0)$$

El único punto singular es el centro.

Los ejes de nuevo son los conjugados de los autovectores de T.

Dichos autovectores son $(1,0)$ y $(0,1)$ y por tanto los ejes:

$$\begin{aligned}(1,0,0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff x+2 = 0\\ (0,1,0)A(x,y,1)^t = 0 &\iff y = 0\end{aligned}$$

(7) Se trata de dos rectas reales paralelas.

Hay una recta de centros que ya hemos calculado:

$$x + y - 1/2 = 0$$

No hay puntos singulares (propios).

Las direcciones asintóticas son las de las rectas.

El eje coincide en este caso con la recta de centros.

(8) Se trata de una parábola. Vimos que la forma reducida era

$$5x^2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}y = 0 \iff x^2 = 2\frac{3\sqrt{5}}{25}y$$

En este caso (por ser una parábola) no tiene centro. Ahora, el vector traslación del cambio de referencia corresponde al vértice de la parábola. Por lo demás procedemos como en los casos anteriores:

Autovalor asociado a 5:
$$(x,y)\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x+y=0$$
El autovalor normalizado es $(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

Autovalor asociado a 0:
$$(x,y)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x-2y=0$$
El autovalor normalizado es $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Observación: Para que la parábola este orientada sobre el eje OY' positivo comprobamos que hemos escogido la orientación correcta del autovalor asociado al 0. El signo del coeficiente de y' en la expresión $\lambda_1 x'^2 - 2cy' = 0$ es:
$$(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})(0,3)^t = 3/\sqrt{5} > 0$$
luego en lugar del vector $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ tomamos el vector $(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Ahora calculamos el eje. Corresponde al conjugado del autovector asociado al autovalor no nulo:
$$(1,-2,0)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 5x-10y-6=0$$
El vértice es la intersección de este eje con la cónica:
$$\left(\frac{10y+6}{5}\right)^2 + 4y^2 - 4y\left(\frac{10y+6}{5}\right) + 6y = 0$$
Resulta el punto $(18/25, -6/25)$

Las fórmulas de cambio de referencia son:
$$(x,y,1) = (x',y',1)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 18/25 & -6/25 & 1 \end{pmatrix}$$
Entonces, en las coordenadas (x',y') sabemos que:

- No tiene centro.

- La dirección asintótica es $(1,0)$; pero no hay asíntota.

- El eje es el $x'=0$.

- El vértice (puntos de corte de la cónica con los ejes) el $(0,0)$.

- El foco es $(0,p/2)$, donde $p=(3\sqrt{5}/5)/5$. Queda $(0, 3\sqrt{5}/50)$.

- La directriz es la recta polar del foco: $y' = -p/2 = -3\sqrt{5}/50$.

- La excentricidad es 1.

Para obtener los resultados en la referencia de partida utilizamos la ecuación de cambio de referencia. También podemos hallar algunas de ellas directamente usando la definición:

- Las direcciones asíntoticas corresponde a la intersección de la cónica con los puntos del infinito:
$$(x,y,0)A(x,y,0)^t = 0 \iff x^2+4y^2-4xy=0 \iff (x-2y)^2=0 \iff (2,1)$$
(en realidad sabemos que es la dirección correspondiente al autovector asociado al 0).

- El eje ya lo calculamos: $5x-10y-6=0$

- El vértice ya lo hemos calculado: $(18/25, -6/25)$.

- Para el foco lo más cómodo es usar las fórmulas de cambio de referencia. Obtenemos: $(3/5, -3/10)$.

- La directriz es la recta polar del foco:

$$(3/5, -3/10, 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 12x + 6y - 9 = 0$$

(9) Se trata de una recta doble real.

La recta de centros, los puntos singulares, asíntotas y el eje coinciden con la propia recta, que ya hemos caclulado antes.

7.– *Sea la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

(i) *Clasificar la cónica y hallar su ecuación reducida.*

La matriz asociada a la cónica A y de términos cuadráticos T son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $det(A) = -9 < 0$ y $det(T) = -3 < 0$ y por tanto la cónica es una hipérbola.

Su ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c = 0, \qquad c = \frac{det(A)}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{det(A)}{det(T)},$$

siendo λ_1, λ_2 los autovalores de T. Los calcuamos como raíces del polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - (-2)^2 = 0 \iff (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0.$$

Obtenemos $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$; la ecuación reducida queda:

$$3x'^2 - y'^2 + 3 = 0.$$

(ii) *Hallar los ejes y las asíntotas (si existen).*

Los ejes son las rectas polares de los autovectores asociados a autovalores de T no nulos. Calculemos tales autovectores.

Asociados a $\lambda_1 = 3$:

$$(T - 3Id)(x, y)^t = (0, 0)^t \iff -2x - 2y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, -1)\}.$$

Asociados a $\lambda_2 = -1$:

$$(T + Id)(x, y)^t = (0, 0)^t \iff 2x - 2y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, 1)\}.$$

Los ejes serán:

$$(1, -1, 0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0.$$

$$(1, 1, 0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y + 2 = 0.$$

Las asíntotas son las rectas polares de las direcciones asintóticas. Estas corresponden a los puntos del infinito de la cónica:

$$(p,q,0)A(p,q,0)^t = 0 \iff p^2 - 4pq + q^2 = 0.$$

Resolviendo queda:

$$(p,q) \in \mathcal{L}\{(2-\sqrt{3},1)\} \text{ ó } (p,q) \in \mathcal{L}\{(2+\sqrt{3},1)\}.$$

Las asíntotas serán:

$$(2-\sqrt{3},1,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -\sqrt{3}x + (-3+2\sqrt{3})y - 3 + \sqrt{3} = 0 \iff x + (2-\sqrt{3})y + \sqrt{3} - 1 = 0.$$

$$(2+\sqrt{3},1,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \sqrt{3}x + (-3-2\sqrt{3})y - 3 - \sqrt{3} = 0 \iff x - (2+\sqrt{3})y - \sqrt{3} - 1 = 0.$$

(iii) *Calcular la excentricidad de la cónica.*

La excentricidad de una hipérbola es:

$$e = \frac{c}{a}$$

siendo $c = \sqrt{a^2+b^2}$, a la distancia del vértice al centro. Para hallar tales valores reescribimos la ecuación reducida de la hipérbola como:

$$3x'^2 - y'^2 + 3 = 0 \iff \frac{y'^2}{3} - \frac{x'^2}{1} = 1,$$

de manera que $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{1}$ y $c = \sqrt{a^2+b^2} = 2$.

La excentricidad resulta:

$$e = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

8.– *En el plano afín y con respecto a la referencia canónica se considera la cónica de ecuacin:*

$$x^2 + y^2 + 4xy + 3x + 3y + 1 = 0.$$

Se pide:

i) *Clasificar la cónica.*

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 \\ 2 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$det(A) = 3/2 > 0, \quad det(T) = -3 < 0$$

y por tanto es una hipérbola.

ii) *Hallar el centro y los ejes.*

El centro (a,b) cumple:

$$(a,b,1)A = (0,0,h).$$

Obtenemos las ecuaciones:

$$a + 2b + 3/2 = 0, \quad 2a + b + 3/2 = 0$$

Resolviendo queda $(a, b) = (-1/2, -1/2)$.

Los ejes son las rectas polares de los puntos del infinito determinados por los autovectores de T. Calculamos los autovalores:

$$det(T - \lambda Id) = 0 \iff \lambda = 3, \quad \text{ó} \quad \lambda = -1.$$

Los autovectores asociados son:

$$(T - 3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, 1)\}.$$

y

$$(T + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(-1, 1)\}.$$

Los ejes quedan:

$$(1, 1, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \iff x + y + 1 = 0$$

y

$$(-1, 1, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \iff x - y = 0.$$

iii) *Hallar la ecuación reducida y la ecuación de cambio de referencia.*

La ecuación reducida es de la forma:

$$3x'^2 - y'^2 + d = 0,$$

con

$$-3d = det(A) = 3/2$$

de donde $d = -1/2$. La ecuación queda:

$$3x'^2 - y'^2 - \frac{1}{2} = 0,$$

o equivalentemente

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{1/6})^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{1/2}^2)} = 1.$$

La ecuación de cambio de referencia es:

$$(x, y) = (-1/2, -1/2) + (x', y')\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) *Hallar la distancia entre ambos focos.*

La distancia focal es $2c$ con:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

es decir:

$$2\sqrt{2/3}.$$

v) *Hallar una paralela al eje focal que pase por el punto* $(2, 0)$.

El eje focal es, en este caso, el determinado por la recta polar del autovector asociado al autovalor positivo. Es decir:

$$x - y = 0.$$

Una recta paralela al mismo es de la forma:

$$x - y + c = 0.$$

Imponemos que base por $(2, 0)$:

$$2 - 0 + c = 0 \iff c = -2,$$

y queda:

$$x - y - 2 = 0.$$

9.– *Se considera la familia de cónicas que depende del parámetro m:*

$$x^2 + m^2y^2 + 2xy + 2x + 2my + 2m = 0.$$

(i) *Clasificar las cónicas en función de m.*

La matriz asociada y de términos cuadráticos de la cónica son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & m \\ 1 & m & 2m \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m^2 \end{pmatrix}.$$

Para clasificar estudiamos los signos de $det(A)$ y $det(T)$. En particular nos fijamos cuando se anulan; serán los puntos límite de los posibles cambios de signos. Se tiene que:

$$det(T) = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

$$det(A) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2-1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix} = (m-1)det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix} = 2m^2(m-1)$$

Por tanto estudiamos los siguientes casos:

	$det(T)$	$det(A)$	Tipo de cónica
$m < -1$	> 0	< 0	Elipse real
$m = -1$	$= 0$	< 0	Parábola
$-1 < m < 0$	< 0	< 0	Hipérbola
$m = 0$	< 0	$= 0$	Rectas reales que se cortan
$0 < m < 1$	< 0	< 0	Hipérbola
$m = 1$	$= 0$	$= 0$	Rectas paralelas reales o complejas o recta doble
$m > 1$	> 0	> 0	Elipse imaginaria

En el caso $m = 1$ debemos de distinguir exactamente de que tipo de cónica se trata de las tres indicadas. La matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vemos que $rango(A) = 2$ y por tanto se trata de rectas paralelas reales o complejas; para distinguirlas intersecamos la cónica con una recta arbitraria; por ejemplo con $x = 0$:

$$y^2 + 2y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}.$$

Las soluciones son complejas y por tanto se trata de dos rectas paralelas imaginarias.

(ii) *Para $m = -1$ hallar la ecuación reducida y el/los foco/focos.*

Para $m = -1$ se trata de una parábola. La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda x'^2 - 2cy' = 0.$$

donde λ es el autovalor no nulo de T y $-\lambda c^2 = det(A)$.

Calculamos los autovalores de T:

$$det(T - \lambda Id) = 0 \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 2).$$

El autovalor no nulo es $\lambda = 2$ y así:

$$c = \sqrt{\frac{det(A)}{\lambda}} = \sqrt{2}.$$

La ecuación reducida queda:

$$2x'^2 - 2\sqrt{2}y' = 0 \iff x'^2 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}y'.$$

El foco, en la nueva referencia es el punto $(0, \sqrt{2}4)$. Para pasarlo a la referencia de partida necesitamos las ecuaciones de cambio de referencia.

Comenzamos calculando los autovectores de T:

$$(T - 2\lambda Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, 1)\}.$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, -1)\}.$$

Los autovectores son $(1, 1)$ y $(1, -1)$; el segundo, el asociado al cero, lo escogemos para que la parábola quede orientada en el semiplano positivo en su forma reducida. Debe de cumplirse que:

$$\vec{v} \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} < 0.$$

En nuestro caso:

$$(1, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} > 0.$$

Luego escogemos el $(-1, 1)$. Definitivamente los autovectores normalizados quedan:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)\}.$$

Ahora calculamos el vértice; es la intersección del eje con la cónica. El eje es la recta polar del autovector de T asociado al autovalor no nulo:

$$(1, 1, 0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y = 0.$$

Intersecamos el eje con la cónica:

$$\begin{aligned} 0 &= x + y \\ 0 &= x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y - 2 \end{aligned}$$

Despejando y en la primera y sustiyendo en la segunda queda:

$$4x - 2 = 0 \iff x = 1/2.$$

El vértice es el punto $(1/2, -1/2)$. Las ecuaciones de cambio de referencia son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Y finalmente el foco queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

10.– *Hallar las ecuaciones de*

(a) *la cónica que pasa por* $A(2,0)$, $B(0,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,0)$ *y* $E(1,-1)$.

Tomamos el haz de cónicas formado a partir de las cónicas degeneradas que forman las rectas $AB\cup CD$ y $AD\cup BC$. Todas las cónicas de dicho haz pasan por estos cuatro puntos. Después basta imponer al haz que pase también por el punto E:

$$\begin{aligned}
AB &\cong \frac{x-0}{2-0}=\frac{y+1}{0+1} \iff x-2y-2=0\\
CD &\cong \frac{x+1}{1+1}=\frac{y}{1} \iff x-2y+1=0\\
AD &\cong y=0\\
BC &\cong \frac{x-1}{0-1}=\frac{y-1}{-1-1} \iff 2x-y-1=0
\end{aligned}$$

El haz de cónicas es:

$$\alpha(x-2y-2)(x-2y+1)+\beta y(2x-y-1)=0$$

Imponemos que pase el punto E, y queda:

$$4\alpha-2\beta=0$$

podemos tomar $\beta=2$ y $\alpha=1$. La cónica buscada es:

$$(x-2y-2)(x-2y+1)+2y(2x-y-1)=0 \iff x^2+2y^2-x-2=0$$

(b) *la cónica cuyo centro es* $C(1,1)$ *y tal que* $y=1$ *es un eje y la polar del punto* $(2,2)$ *es la recta* $x+y-3=0$.

Dado que un eje es $y=1$, sabemos que un autovector de la matriz T asociada tiene la dirección $(1,0)$ y el otro (perpendicular) la $(0,1)$. Por tanto la matriz de la cónica es de la forma:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & d\\ 0 & b & e\\ d & e & c\end{pmatrix}$$

Por ser el centro el $(1,1)$ se verifica:

$$(1,1,0)A=(0,0,t) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a+d=0 \quad\Rightarrow\quad d=-a\\ b+e=0 \quad\Rightarrow\quad e=-b\end{cases}$$

Ahora imponemos la condición de polaridad:

$$(2,2,1)A=(1,1,-3) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2a+d=1\\ 2b+e=1\\ 2d+2e-c=-3\end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las 5 ecuaciones queda:

$$a=1;\quad b=1;\quad c=1;\quad d=-1;\quad e=-1$$

Es decir la cónica es:

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0 \iff (x-1)^2+(y-1)^2=1$$

(la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 1).

(c) *la elipse cuyos focos están en los puntos* $(0,0)$ *y* $(4,2)$ *y sabiendo además que al menos uno de los vértices del eje menor se encuentra en la parábola de ecuación* $5x^2 + 10y - 34 = 0$.

Conocidos los focos y teniendo en cuenta la caracterización de la elipse como lugar geométrico, sabemos que la ecuación pedida es:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 2a,$$

donde a es la longitud del semidiámetro mayor de la elipse.

Para hallar a tenemos en cuenta que:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Siendo b la longitud del semidiámetro menor de la elipse y c la mitad de la distancia focal. En concreto:

$$c = \sqrt{4^2 + 2^2}/2 = \sqrt{5},$$

y b es la distancia de uno de los vértices del eje menor al centro de la elipse.

El centro de la elipse es el punto medio de los focos:

$$C = \frac{(0,0) + (4,2)}{2} = (2,1).$$

El eje menor es perpendicular a la recta que une los focos y pasa por el centro. Su vector normal es por tanto $(4,2) - (0,0) = (4,2)$. Su ecuación es de la forma:

$$4x + 2y + d = 0.$$

Imponemos que pase por $(2,1)$:

$$8 + 2 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -10.$$

El eje menor queda:

$$2x + y - 5 = 0.$$

Intersecamos con la parábola dada:

$$5x^2 + 50 - 20x - 34 = 0 \iff 5x^2 - 20x + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 80}}{5} = 2 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Y entonces:

$$y = 5 - 2x = 1 \mp \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Uno de los vértices tiene coordenadas:

$$(2 + 2\sqrt{5}/5, 1 - 4\sqrt{5}/5).$$

Por tanto:

$$b = dist(2 + 2\sqrt{5}/5, 1 - 4\sqrt{5}/5), (2,1)) = 2.$$

Entonces:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4 + 5} = 3.$$

La ecuación buscada es:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 6 \iff (\sqrt{(x)^2 + (y)^2})^2 = (6 - \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2})^2.$$

Operando queda:

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = 2x + y + 4,$$

y elevando nuevamente al cuadrado y simplificando:

$$5x^2 + 8y^2 - 4xy - 16x - 8y - 16 = 0.$$

(d) *Hallar la ecuación de una hipérbola que pasa por el origen, tiene por asíntota la recta* $x - 2y - 1 = 0$ *y uno de sus ejes es la recta* $x - y - 1 = 0$.

El eje es un eje de simetría de la cónica. Por tanto podemos calcular la otra asíntota como simétrica de la dada. Una vez que tengamos las dos asíntotas formaremos el haz de cónicas y obtendremos la cónica buscada imponiendo que pase por el origen.

Para hallar la simétrica de la asíntota tenemos en cuenta que uno de sus puntos es la intersección de la misma y el eje de simetría:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (1, 0).$$

Para hallar otro punto de la recta buscada, hallamos el simétrico de un punto cualquiera de la asíntota dada. Tomamos por ejemplo el punto $A = (-1, -1)$ que verifica la ecuación $x-2y-1 = 0$. Su simétrico $A' = (a, b)$ cumple:

- El punto medio de A, A' pertenece al eje de simetría:

$$\frac{A + A'}{2} = (\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}) \text{ pertenece a la recta } x - y - 1 = 0,$$

de donde,

$$a - b = 2.$$

- El vector AA' es perpendicular al eje de simetría, de donde:

$$(a + 1, b + 1)(1, 1) = 0 \iff a + b = -2.$$

Obtenemos $A' = (a, b) = (0, -2)$. La asíntota buscada es la recta que une los puntos $(1, 0)$ y $(0, -2)$:

$$\frac{x}{1} - \frac{y}{2} = 1 \iff 2x - y - 2 = 0.$$

El haz de cónicas conocidas las dos asíntotas es:

$$(x - 2y - 1)(2x - y - 2) + c = 0.$$

Imponiendo que pase por el origen hallamos el valor de c:

$$(-1)(-2) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -2.$$

La cónica pedida queda:

$$(x - 2y - 1)(2x - y - 2) - 2 = 0,$$

operando:

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 5y = 0.$$

(e) *una parábola que pasa por los puntos* $P = (0, 2)$, $Q = (1, 0)$ *y tal que la recta que une* P *y* Q *es la recta polar del punto* $(0, 0)$.

Método I: Recordemos que la recta polar de un punto O respecto de una cónica une los puntos de tangencica de las tangentes exteriores a la cónica pasando por O. En nuestro caso esto quiere decir que las rectas uniendo $O = (0, 0)$ con P y Q respectivamente, son tangentes a la parábola.

Utilizaremos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

La recta OP tiene por ecuación $x=0$; la recta OQ tiene por ecuación $y=0$; la recta PQ es:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-2}{0-2} \iff 2x+y-2=0.$$

El haz queda:

$$\lambda xy+(2x+y-2)^2=0 \iff 4x^2+y^2+(4+\lambda)xy-8x-4y+4=0.$$

Para hallar el parámetro imponemos que la cónica sea de tipo parabólico, es decir, que el determinante de la matriz de términos cuadráticos sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 4 & (4+\lambda)/2 \\ (4+\lambda)/2 & 1 \end{vmatrix}=0 \iff \frac{\lambda^2}{4}+2\lambda=0.$$

Obtenemos:

- $\lambda=0$, pero entonces sustituyendo en el haz nos quedaría sólo la recta doble $(2x+y-2)^2=0$ que no es una parábola.

- $\lambda=-8$. Entonces nos queda la ecuación:

$$4x^2+y^2-4xy-8x-4y+4=0.$$

La matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es no nulo, por tanto es una cónica no degenerada y en definitiva la parábola buscada.

Método II: La matriz asociada a la cónica buscada es:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Imponemos las condiciones del enunciado.

Como los puntos P y Q pertenencen a la cónica tenemos las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} (0,2,1)A(0,2,1)^t=0 \iff 4d+4e+f=0. \\ (1,0,1)A(1,0,1)^t=0 \iff a+2c+f=0. \end{array}\right. \qquad (I)$$

Además la recta polar del punto $(0,0)$ es la recta PQ, $2x+y-2=0$:

$$(0,0,1)A(x,y,1)^t=0 \quad \equiv \quad 2x+y-2=0 \iff cx+ey+f \quad \equiv 2x+y-2=0.$$

Deducimos que:

$$\frac{c}{2}=\frac{e}{1}=\frac{f}{-2} \iff c=2e, \quad f=-2e.$$

Susituyendo en (I) nos queda:

$$d=-e/2, \qquad a=-2e.$$

Y la matriz asociada:

$$A=\begin{pmatrix} -2e & b & 2e \\ b & -e/2 & e \\ 2e & e & -2e \end{pmatrix}.$$

Imponemos que el determinante de la matriz de términos cuadráticos sea nulo para que la cónica sea de tipo parabólico:

$$\begin{vmatrix} -2e & b \\ b & -e/2 \end{vmatrix} = 0 \iff e^2 = b^2.$$

Tenemos dos soluciones:

$$e = b \text{ ó } e = -b.$$

Si suponemos $e = b = 2$, la matriz asociada queda:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

con $det(A) \neq 0$. Es la parábola buscada:

$$-4x^2 - y^2 + 4xy + 8x + 4y - 4 = 0 \iff 4x^2 + y^2 - 4xy - 8x - 4y + 4 = 0.$$

Si suponemos $e = -b = 2$, la matriz asociada queda:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

con $det(A) = 0$. Es degenerada y no es una parábola.

(f) *una parábola que tiene por eje la recta $x - y + 1 = 0$ y es tangente en el origen a la recta $x - 2y = 0$.*

Sabemos que el eje de una parábola es un eje de simetría de la curva. Eso nos permite "duplicar" la información dada; es decir, tomando la simétrica de la tangente por el origen tendremos otra tangente. Formaremos entonces el haz de cónicas conocidas dos tangentes e impondremos que la cónica sea una parábola.

El simétrico del origen respecto al eje es un punto (a, b) verificando:

- El punto medio del segmento que lo une con el origen está en el eje:

$$\frac{a+0}{2} - \frac{b+0}{2} + 1 = 0 \iff a - b + 2 = 0.$$

- El segemento que lo une con el origen es perpendicular a éste:

$$(a-0, b-0) \cdot (1,1) = 0 \iff a + b = 0.$$

De ambas ecuaciones deducimos que el simétrico es el punto $(-1, 1)$.

El simétrico de la tangente pasa por el punto hallado anteriormente y por la intersección del eje y de la tangente:

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y + 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \iff (x, y) = (-2, -1).$$

Por tanto es la recta:

$$\frac{x+2}{-1+2} = \frac{y+1}{1+1} \iff 2x - y + 3 = 0.$$

Finalmente para formar el haz necesitamos la recta que une los puntos de tangencia, $(0, 0)$, $(-1, 1)$:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-0}{1-0} \iff x + y = 0.$$

El haz queda:
$$(x-2y)(2x-y+3)+c(x+y)^2=0.$$
Operando:
$$(2+c)x^2+(2c-5)xy+(2+c)y^2+3x-6y=0.$$

Para que sea una parábola la matriz de términos cuadráticos tiene que tener determinante nulo:

$$det\begin{pmatrix} 2+c & c-5/2 \\ c-5/2 & 2+c \end{pmatrix}=0 \iff (2+c)^2-(c-5/2)^2=0.$$

De donde:
$$c=1/4.$$
La parábola queda:
$$3x^2-6xy+3y^2+4x-8y=0.$$

(g) *una elipse cuyo centro es el* $(1,2)$*, una directriz tiene de ecuación* $y=6$ *y uno de los vértices está sobre el eje* OX*.* **(Segundo parcial, mayo 2001)**

Dado que la directriz es $y=6$ sabemos que los ejes de la elipse son paralelos a los ejes de coordenadas y por tanto la ecuación de elipse es de la forma:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$$

Además si un vértice está sobre el eje OX, corresponderá a la intersección del eje pasando por el centro y paralelo a OY, con la recta OX, es decir, al punto $(1,0)$. Por tanto deducimos que $b=2$. Finalmente sabemos que la ecuación de la directriz $y=6$ debe de ser:

$$(y-2)=\frac{b^2}{c}=\frac{4}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{c}=4 \quad \Rightarrow \quad c=1$$

y por último, teniendo en cuenta que b es el radio mayor de la elipse, $a^2=b^2-c^2=4-1=3$. La ecuación pedida es:

$$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4}=1 \iff 4x^2+3y^2-8x-12y+4=0$$

(h) *una elipse sabiendo que tiene uno de sus focos en el punto* $(-4,2)$*, el vértice más alejado del mismo es el punto* $(2,-1)$ *y la excentricidad vale* $1/2$*.*

Si denotamos por a,b,c respectivamente a las longitudes del semieje mayor, menor y distancia del foco al centro, de los datos dados deducimos que:

$$a+c=d(F,V), \qquad \frac{c}{a}=e=\frac{1}{2},$$

siendo $F=(-4,2)$ y $V=(2,-1)$. Operando obtenemos:

$$d(F,V)=\sqrt{(-4-2)^2+(2-(-1))^2}=3\sqrt{5}$$

y de ahí $a=2\sqrt{5}$ y $c=\sqrt{5}$.

El otro foco F' está a distancia $2c$ sobre la recta que une F y V en la dirección $\vec{FV}$, es decir,

$$F'=F+\frac{\vec{F}V}{\|FV\|}\cdot 2c.$$

Operando tenemos:

$$\vec{F}V=(2,-1)-(-4,2)=(6,-3) \text{ y } \|\vec{F}V\|=\sqrt{6^2+(-3)^2}=3\sqrt{5}.$$

de donde:

$$F' = (-4,2) + \frac{(6,-3)}{3\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = (0,0).$$

Finalmente para obtener la ecuación de la elipse usamos su caracterización como lugar geométrico de puntos cuya suma de distancias a los focos es constante. Tal constante sabemos además que es $2a$. La ecuación será entonces:

$$\sqrt{(x-(-4))^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2+y^2} = 4\sqrt{5}.$$

Simplificando queda:

$$16x^2 + 19y^2 + 4xy + 60x - 30y - 225 = 0.$$

(1.2 puntos)

(i) *la parábola C tal que: la recta de ecuación $x+y-2=0$ es la tangente a C en el vértice; C pasa por el origen de coordenadas; y la recta polar del punto $(2,1)$ con respecto a C es paralela al eje OX.*

El autovector asociado al autovalor no nulo de la matriz T (parte cuadrática) de la parábola, tiene la misma dirección que la tangente en el vértice, es decir, $(1,-1)$. Teniendo en cuenta que $det(T) = 0$, salvo producto por escalar, deducimos que T es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz A asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & d \\ -1 & 1 & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Dado que el origen pertenece a la cónica, deducimos que $f = 0$.

Aplicamos ahora que la recta polar en el punto $(2,1)$ es paralela al eje OX. Significa que:

$$(2,1,1)A(x,y,1)^t \text{ es paralela a } y=0 \quad \Rightarrow \quad 2-1+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-1$$

Tenemos que, la ecuación de la cónica es:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2ey = 0 \iff (x-y)^2 - 2x + 2ey = 0$$

Para calcular el coeficiente e, aplicamos que $x+y-2$ es tangente a la parábola. Su intersección con la cónica debe de ser un único punto. El punto genérico de esta recta es $(\lambda, 2-\lambda)$. Sustituimos en la cónica:

$$(2\lambda-2)^2 - 2\lambda + 2e(2-\lambda) = 0 \iff 4\lambda^2 + (-2e-10)\lambda + (4+4e) = 0$$

Para que haya solamente una solución el discriminante ha de ser cero:

$$(-2e-10)^2 - 16(4+4e) = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 3$$

La ecuación pedida es:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 6y = 0$$

11.– *Calcular la ecuación de una parábola que tiene el foco sobre la recta $x+2=0$, el vértice sobre la recta $y-1=0$ y por directriz la recta $x-y=0$.*

El foco, por estar sobre la recta $x+2=0$ es de la forma $F=(-2,a)$.

El vértice, por estar sobre la recta $y-1=0$ es de la forma $V=(b,1)$.

Además la recta que une el vértice y el foco es perpendicular a la directriz, cuyo vector director es el $(1,1)$:

$$\vec{VF} \perp directriz \quad \Rightarrow \quad (b+2, 1-a)\cdot(1,1)=0 \quad \Rightarrow \quad 3+b-a=0.$$

Dicha recta corta a la directriz en un punto P de la forma $P=(c,c)$ y además V es el punto medio de F y P. De manera que:

$$V=\frac{F+P}{2} \quad \Rightarrow \quad 2b=c-2, \quad 2=a+c.$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones obtenemos:

$$a=2, \quad b=-1, \quad c=0.$$

Conocido el foco $F(-2,2)$ la parábola es el lugar geométrico de puntos que equidistan de foco y directriz:

$$d(F,(x,y))=d(directriz,(x,y)) \iff (x+2)^2+(y-2)^2=\frac{(x-y)^2}{2} \iff x^2+y^2+2xy+8x-8y+16=0.$$

12.– *En un haz de cónicas generado por dos cónicas que no son de tipo parábolico, cuál es el máximo número de parábolas que puede haber?.*

Un haz de cónicas se forma tomando combinaciones lineales de las ecuaciones de las cónicas generadoras:

$$((x,y,1)A_1(x,y,1)^t)+\lambda((x,y,1)A_2(x,y,1)^t)=0.$$

(al usar un sólo parámetro omitimos una de las cónicas generadoras; pero ya sabemos que étas no son una parábola).

La condición para que sean parábolas es que el determinante de la matriz de términos cuadráticos sea nulo. Pero ese determinante al ser de orden dos y no anularse siempre (porque al menos hay una cónica que no es parábola), nos da una ecuación de grado uno o dos en la variable λ. Por tanto a lo sumo hay una o dos soluciones. El máximo número de parábolas que puede haber son dos.

13.– *Hallar la ecuación de una cónica que tiene por asíntota la recta $x=2$, un vértice en el punto $(1,-1)$ y la recta tangente en ese vértice es $x+y=0$.*

Método I:

Conocemos una asíntota y una recta tangente en un punto dado. Podemos usar el haz de cónicas en esas condiciones. Las dos cónicas que lo generan son:

- La cónica formada por la asíntota y la tangente:

$$(x-2)(x+y)$$

- La cónica formada por la recta doble paralela a la asíntota pasando por el punto de tangencia:

Una paralela a la asíntota es de la forma:

$$x+k=0.$$

Imponemos que pase por el punto $(1,-1)$:

$$1+k=0 \quad \Rightarrow \quad k=-1.$$

Por tanto la segunda cónica del haz es:

$$(x-1)^2$$

El haz nos queda:

$$(x-2)(x+y)+\lambda(x-1)^2=0 \iff (1+\lambda)x^2+xy-2(1+\lambda)x-2y+\lambda=0.$$

Finalmente tenemos en cuenta que uno de los ejes de la hipérbola es paralelo a la tangente en el vértice; el eje es la recta polar de su vector normal. Tal vector normal es el $(1,1)$. Su recta polar:

$$(1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1/2 & 1+\lambda \\ 1/2 & 0 & -1 \\ 1+\lambda & -1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=(\lambda+1/2)x-y/2+(2+\lambda)=0$$

Ha de ser paralelo al $x+y=0$, y por tanto:

$$\frac{\lambda+1/2}{1}=\frac{-1/2}{1} \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1.$$

La cónica buscada queda:

$$xy-2y-1=0.$$

Método II:

El eje es perpendicular a la tangente en el vértice. Por tanto es de la forma:

$$x-y+k=0$$

y por pasar por $(1,-1)$:

$$1-(-1)+k=0 \qquad \Rightarrow \qquad k=-2.$$

El eje tiene por ecuación $x-y-2=0$.

Ahora el eje es un punto de simetría de la cónica; la otra asíntota es la simétrica de la dada respecto a tal eje. Para hallarla tenemos en cuenta:

- Pasa por la intersección del eje y de la asíntota dada:

$$\begin{aligned} x-2&=0 \\ x-y-2&=0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y)=(2,0).$$

- Dado $P=(2,1)$ en la asíntota su simétrico $P'=(a,b)$ cumple:

$$\frac{P+P'}{2}\in eje, \qquad \vec{PP'}\perp eje.$$

Obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{2+a}{2}-\frac{1+b}{2}-2=0, \qquad a-2+b-1=0.$$

Resolviendo el sistema queda $a=3$, $b=0$.

La asíntota buscada es la recta que une los puntos $(2,0)$ y $(3,0)$, es decir, la recta $y=0$.

El haz de cónicas conocidas dos asíntotas es:

$$y(x-2)+\lambda=0.$$

Y finalmente imponemos que pase por el vértice $(1,-1)$:

$$-1(1-2)+\lambda=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=-1.$$

La ćonica pedida queda:

$$xy-2y-1=0.$$

14.– *Calcular la ecuación de una parábola de eje $2x - y = 0$, vértice $(0,0)$ y que pasa por el punto $(5,0)$.*

Método I: Sabemos que el foco es un punto sobre el eje. Por tanto:

$$F = (a, 2a).$$

Por otra parte la intersección Q de la directriz y del eje es el simétrico del foco respecto al vértice:

$$\frac{Q+F}{2} = (0,0) \quad \Rightarrow \quad Q = (-a, -2a).$$

La directriz es perpendicular al eje y pasa por Q:

$$x + 2y + d = 0; \quad -a - 4a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 5a.$$

Queda:

$$x + 2y + 5a = 0.$$

La parábola está formada por los puntos que equidistan de la directriz y del foco:

$$\frac{(x+2y+5a)^2}{1^2+2^2} = (x-a)^2 + (y-2a)^2.$$

Como el punto $(5,0)$ pertenece a la parábola:

$$\frac{(5+5a)^2}{5} = (5-a)^2 + (-2a)^2.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $a = 1$. Finalmente la ecuación queda:

$$\frac{(x+2y+5)^2}{1^2+2^2} = (x-1)^2 + (y-2)^2 \iff 4x^2 + y^2 - 4xy - 20x - 40y = 0.$$

Método II: En un sistema de referencia adecuado la ecuación reducida de la cónica es:

$$x'^2 = 2py'.$$

La fórmula de cambio de referencia es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (vertice) + M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

donde M_{BC} es una matriz de cambio de base ortogonal. Los vectores de la base B son el vector normal al eje y su vector director (**por este orden**):

$$\{\frac{(2,-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}, \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}}\}.$$

Por tanto la ecuación de cambio de referencia queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cambiamos de base la ecuación anterior:

$$\frac{1}{5}(2x-y)^2 = \frac{\sqrt{5}}{5} 2p(x+2y).$$

Imponemos que la curva pase por el punto $(5,0)$:

$$\frac{1}{5}(10)^2 = \frac{\sqrt{5}}{5} 10p \qquad \Rightarrow \qquad p = 2\sqrt{5}.$$

Por tanto la ecuación de la parábola queda:

$$(2x-y)^2 = 20(x+2y) \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x^2 + y^2 - 4xy - 20x - 40y = 0.$$

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

15.– *Encontrar la única respuesta correcta, en las siguientes cuestiones:*

(a) *Una ecuación reducida de la cónica* $(x + 2y)^2 + 2y = 0$ *es*

Podemos ver que la ecuación es un parábola. Si desarrollamos la expresión que nos dan queda:

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 2y = 0$$

El determinante de la matriz T de términos cuadráticos es 0. Pero el determinante de la matriz A asociada es no nulo. Se trata por tanto de una parábola.

Otra forma de verlo es hacer directamente el cambio de variable (OJO la nueva referencia no sería rectangular):

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= y \end{aligned}$$

La nueva ecuación (OJO, no la reducida) es $x'^2 + 2y' = 0$.

○ $(x'')^2 + 4(y'')^2 - 1 = 0$

FALSO.

○ $(x'')^2 + 2(y'')^2 = 0$

FALSO.

○ *la ecuación dada ya es reducida*

FALSO.

○ *ninguna de las restantes respuestas es correcta*

VERDADERO.

(Segundo parcial, junio 2002)

(b) *Si tenemos un haz de cónicas* $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ *donde* C_1 *es una cónica formada por dos rectas paralelas y* C_2 *otra cónica formada por otras dos rectas paralelas, pero no paralelas a las de* C_1*,*

○ *todas las cónicas del haz son degeneradas.*

FALSO. Ejemplo. Consideramos las rectas $x = 0$, $x - 2 = 0$, $y = 0$, $y - 2 = 0$. El haz es:

$$\alpha x(x - 2) + \beta y(y - 2) = 0$$

Si $\alpha = \beta = 1$, la ecuación de la cónica es:

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0 \iff (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

y vemos que se trata de una elipse (no denegerada).

○ *todas las cónicas del haz son de tipo parabólico.*

FALSO. Lo ilustra el ejmplo anterior.

○ *las únicas cónicas degeneradas del haz son* C_1 *y* C_2*.*

FALSO. En el haz del ejemplo anterior, tomamos $\alpha = 1$ y $\beta = -1$:

$$x(x - 2) - y(y - 2) = 0 \iff x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0 \iff (x - y)(x + y - 2) = 0$$

Se trata de una cónica degenerada formada por dos rectas que se cortan.

De hecho el haz que nos dan corresponde al haz de cónicas que pasan por cuatro puntos situados en un paralelogramo. Hay tres posibles pares de rectas que pasan por ellos y por tanto hay tres cónicas degeneradas en el haz.

○ *las únicas cónicas de tipo parabólico del haz son* C_1 *y* C_2*.*

VERDADERO. Es claro que C_1 y C_2 son de tipo parabólico, por corresponder a pares de rectas paraleas.

De hecho salvo cambio de referencia (no necesariamente rectangular) el haz siempre puede escribirse como:

$$\alpha x(x-2) + \beta y(y-2) = 0$$

La matriz T de una cónica de este haz es:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Vemos que su determinante sólo se anula si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, es decir, para las cónicas iniciales C_1 y C_2.

(Segundo parcial, junio 1999)

(c) *La familia de cónicas* $3x^2 + 2kxy + 4x + 2ly + 1 = 0$ *con* $k, l \in \mathbb{R}$

Las matrices de términos cuadráticos y asociada a la cónica son respectivamente:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & k & 2 \\ k & 0 & l \\ 2 & l & 1 \end{pmatrix}$$

donde $det(T) = -k^2$ y $det(A) = 4kl - 3l^2 - k^2 = (k-l)(3l-k)$.

◯ *para* $k = 0$ *contiene sólo parábolas.*

FALSO. Si $k = 0$ entonces $det(T) = 0$ y $det(A) = -3l^2$. Luego si $l = 0$ las cónicas son degeneradas y no parábolas.

◯ *contiene alguna circunferencia.*

FALSO. En general $det(T) = -k^2 \leq 0$, por lo que las cónicas nunca son de tipo elíptico.

◯ *contiene algún par de rectas secantes reales.*

VERDADERO. Por ejemplo si $det(T) < 0$ y $det(A) = 0$. Basta tomar $l = k$ ó $l = k/3$ y $k \neq 0$.

◯ *contiene alguna cónica sin direcciones asintóticas reales.*

FALSO. Basta tener en cuenta que $det(T) \leq 0$ por lo que todas las cónicas son de tipo parabólico o hiperbólico y tienen direcciones asintóticas reales.

(Segundo parcial, junio 1997)

I.– *Para cada número $k \in R$ se define la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 2kxy + y^2 - 1 = 0.$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.*

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$det(A) = -(1-k^2), \quad det(T) = 1 - k^2.$$

Por tanto $det(T) = 0 \iff k = \pm 1$. Distinguimos los casos:

- Si $k < -1$, $det(T) < 0$, $det(A) > 0$. Se trata de una hipérbola.

- Si $k = -1$, $det(T) = 0$, $det(A) = 0$. Se trata de un par de rectas paralelas, reales o imaginaria, o una recta doble. En particular la ecuación queda:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \iff (x+y)^2 - 1 = 0 \iff (x+y-1)(x+y+1) = 0.$$

Se trata por tanto de dos rectas paralelas reales.

- Si $-1 < k < 1$, $det(T) > 0$, $det(A) < 0$. Se trata de una elipse real.

- Si $k = 1$, $det(T) = 0$, $det(A) = 0$. Se trata de un par de rectas paralelas, reales o imaginarias, o una recta doble. En particular la ecuación queda:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 \iff (x-y)^2 - 1 = 0 \iff (x-y-1)(x-y+1) = 0.$$

Se trata por tanto de dos rectas paralelas reales.

- Si $k > 1$, $det(T) < 0$, $det(A) > 0$. Se trata de una hipérbola.

(ii) *Cuando tenga sentido, calcular al excentricidad de la cónica en función de k.*

Tiene sentido cuando la cónica es una elipse o una hipérbola. Calculamos los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - k^2 = 0 \iff \lambda = 1 - k \quad \text{ó} \quad \lambda = 1 + k.$$

La ecuación reducida quedará por tanto:

$$(1-k)x^2 + (1+k)y^2 = 1 - k^2 \iff \frac{x^2}{1+k} + \frac{y^2}{1-k} = 1.$$

Distinguimos ahora los casos:

- Si $k < -1$ es una hipérbola. La excentricidad es $e = \dfrac{c}{a}$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y a, b respectivamente la raíz cuadrada de los denominadores que acompañan a los coeficientes de x, y con signos positivo y negativo. En este caso $a = \sqrt{1-k}$, $b = \sqrt{-k-1}$. Por tanto:

$$c = \sqrt{(1-k) + (-1-k)} = \sqrt{-2k},$$

y

$$e = \frac{\sqrt{-2k}}{\sqrt{1-k}}.$$

- Si $-1 < k < 1$ es una elpise. La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, siendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y a, b respectivamente los semiejes mayor y menor. Vemos que:

– Si $-1 < k \leq 0$ entonces el semieje mayor es $a = \sqrt{1-k}$ y el menor $b = \sqrt{1+k}$.

– Si $0 \leq k < 1$ entonces el semieje mayor es $a = \sqrt{1+k}$ y el menor $b = \sqrt{1-k}$.

Ambas cosas se resumen diciendo que $a = \sqrt{1+|k|}, \quad b = \sqrt{1-|k|}$. Entonces:

$$c = \sqrt{(1+|k|) - (1-|k|)} = \sqrt{2|k|},$$

y

$$e = \frac{\sqrt{2|k|}}{\sqrt{1+|k|}}.$$

- Si $k > 1$ es una hipérbola. La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y a, b respectivamente la raíz cuadrada de los denominadores que acompañan a los coeficientes de x, y con signos positivo y negativo. En este caso $a = \sqrt{1+k}$, $b = \sqrt{k-1}$. Por tanto:

$$c = \sqrt{(1+k) + (k-1)} = \sqrt{2k},$$

y

$$e = \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{1+k}}.$$

En resumen y en todo caso:

$$e = \frac{\sqrt{2|k|}}{\sqrt{1+|k|}}.$$

(1 punto)

II.– *Se dice que una hipérbola es equilátera cuando sus asíntotas son perpendiculares.*

(a) *Demostrar que una cónica no degenerada es una hipérbola equilátera si y sólo si es nula la traza de su matriz T de coeficientes cuadráticos, con respecto a una referencia rectangular.*

Sea T la matriz de términos cuadrático de una matriz no degenerada.

Supongamos que la traza es nula. Entonces la suma de los autovalores de T es 0, y estos son λ y $-\lambda$, donde $\lambda \neq 0$, por ser la cónica no degenerada. Se trata de una hipérbola y en una referencia rectangular adecuada sabemos que su ecuación se escribe como:

$$\lambda x^2 - \lambda y^2 + c = 0$$

Las asíntotas son por tanto $\lambda x - \lambda y = 0$ y $\lambda x + \lambda y = 0$. Vemos que son perpendiculares.

Recíprocamente dada una hipérbola equilátera, sabemos que su ecuación en un sistema de referencia rectangular adecuado puede escribirse como:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de T, de signos positivo y negativo respectivamente. Las asíntotas son $\sqrt{\lambda_1}x + \sqrt{-\lambda_2}y = 0$ y $\sqrt{\lambda_1}x - \sqrt{-\lambda_2}y = 0$. Si son perpendiculares, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Deducimos que la traza de T es cero.

(b) *Encontrar todas las hipérbolas equiláteras que tengan la recta $y = 2x$ por eje focal.*

Recordemos primero lo siguiente. Si la ecuación reducida de una hipérbola equilátera es:

$$\lambda x^2 - \lambda y^2 + c = 0$$

con $\lambda > 0$ y $c < 0$, el eje focal es el eje OX $(y = 0)$ y es paralelo al autovector de la matriz T asociado al autovalor positivo.

Por tanto en las hipérbolas que buscamos el autovector de la matriz T asociado al autovalor positivo será el $(1, 2)$, siempre que $det(A) > 0$ (condición análoga a $c > 0$).

Así por el apartado anterior, la matriz T es de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Imponemos que $(1, 2)$ sea un autovector asociado al autovector λ:

$$(1, 2)T = \lambda(1, 2) \quad \Rightarrow \quad a = -3\lambda/5; \quad b = 4\lambda/5$$

Podemos tomar $\lambda = 5$, y T es de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz asociada A será:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & d \\ 4 & 3 & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Ahora imponemos que el eje focal sea $y = 2x$, es decir: $(2, -1, 0)A(x, y, 1)$ paralelo a $2x - y = 0$. Operando obtenemos:

$$2d - e = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 2d$$

La matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & d \\ 4 & 3 & 2d \\ d & 2d & f \end{pmatrix}$$

Recordemos que además hemos impuesto la condición $det(A) > 0$:

$$det(A) > 0 \iff d^2 > f$$

III.– *Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro $k \in R$:*

$$x^2 + 8xy + ky^2 - 2x + 2ky = 0$$

a) *Clasificar las cónicas en función de k.*

La matriz asociada A y de términos cuadráticos T son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & k & k \\ -1 & k & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & k \end{pmatrix}.$$

Calculamos los determinantes:

$$|A| = -k(k+9), \qquad |T| = k - 16$$

Los puntos donde se anulan y son $k = -9, 0, 16$. Por tanto estudiamos los siguientes casos:

Parámetro	$\lvert A\rvert$	$\lvert T\rvert$	Cónica
$k < -9$	$-$	$-$	hipérbola
$k = -9$	0	$-$	rectas reales cortándose en un punto
$-9 < k < 0$	$+$	$-$	hipérbola
$k = 0$	0	$-$	rectas reales cortándose en un punto
$0 < k < 16$	$-$	$-$	hipérbola
$k = 16$	$-$	0	parábola
$k > 16$	$-$	$+$	elipse

b) *Para $k = 1$ hallar la distancia entre sus dos focos.*

Las matrices A y T nos quedan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el apartado anterior vimos que para $k = 1$ la cónica es una hipérbola. Sabemos que mediante un determinado giro y una traslación (conservando por tanto las distancias) la cónica tiene por ecuación reducida una de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En ese caso la distancia del centro al foco es $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y entre los dos focos $2c$.

Comencemos entonces calculando la ecuación reducida. El polinomio característico de T es:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 4^2 = 0 \iff (5-\lambda)(-3-\lambda) = 0$$

Por tanto los autovalores son:

$$\lambda_1 = 5, \qquad \lambda_2 = -3.$$

La ecuación reducida queda:

$$5x'^2 - 3y'^2 + d = 0.$$

Para hallar d utilizamos que el determinante de la matriz asociada se conserva por isometrías. Por tanto:

$$-15d = |A| \iff d = \frac{|A|}{-15} = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3}.$$

La ecuación resulta:

$$5x'^2 - 3y'^2 + \frac{2}{3} = 0.$$

Y operando:

$$\frac{y'^2}{2/9} - \frac{x'^2}{2/15} = 1.$$

La distancia del centro a un foco es:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{2}{15}} = \sqrt{\frac{16}{45}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

Y finalmente la distancia entre los focos:

$$2c = \frac{8\sqrt{5}}{15}.$$

c) *Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.*

Vimos que las rectas aparecen para $k = -9$ y $k = 0$. En cada caso, para hallar sus ecuaciones calcularemos el centro de la cónica, que es el punto de intersección de ambas y un punto adicional en cada una ellas, intersecando la cónica con una recta.

Para $k = -9$, la ecuación es:

$$x^2 + 8xy - 9y^2 - 2x - 18y = 0.$$

El cento es el punto (p, q) verificando:

$$(p, q, 1)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -9 & -9 \\ -1 & -9 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, h) \iff \begin{array}{r} p + 4q - 1 = 0 \\ 4p - 9q - 9 = 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $(p, q) = (\frac{9}{5}, \frac{-1}{5})$.

Ahora intersecamos la cónica con la recta $y = 0$ y obtenemos:

$$x^2 - 2x = 0 \iff x(x - 2) = 0.$$

Los puntos de intersección son: $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

Las rectas buscadas se obtienen uniéndolos con el centro.

Recta por $(0, 0)$ y $(\frac{9}{5}, \frac{-1}{5})$:

$$\frac{x}{9/5} = \frac{y}{-1/5} \iff x + 9y = 0.$$

Recta por $(2, 0)$ y $(\frac{9}{5}, \frac{-1}{5})$:

$$\frac{x-2}{9/5-2} = \frac{y}{-1/5} \iff x - y - 2 = 0.$$

Para $k = 0$, la ecuación es:

$$x^2 + 8xy - 2x = 0 \iff x(x + 8y - 2) = 0$$

Directamente vemos que las dos rectas en las que se descompone son:

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 8y - 2 = 0.$$

IV.– *Se consideran las cónicas C_1 y C_2 de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} C_1 \equiv &\quad x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0 \\ C_2 \equiv &\quad xy + y^2 - 2x + y - 8 = 0. \end{aligned}$$

Hallar la ecuación de la cónica no degenerada que pasa por los puntos de intersección de C_1 y C_2 y tiene el centro sobre la recta $x - y - 2 = 0$.

Consideramos el haz de cónicas que pasan por los puntos $C_1 \cap C_2$. Está generado por dos cónicas cualesquiera pasando por tales puntos; en concreto por las propias C_1 y C_2. El haz es por tanto:

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 5 + a(xy + y^2 - 2x + y - 8) = 0$$

y agrupando términos:

$$x^2+(1+a)xy+(1+a)y^2+2(1-a)x+(1+a)y-5-8a=0,$$

para cualquier $a\in\mathbb{R}$. Vamos a imponer la condición de que el centro de la cónica esté en la recta dada. Para hallar el centro consideramos la matriz asociada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & (1+a)/2 & 1-a\\ (1+a)/2 & (1+a) & (1+a)\\ 1-a & (1+a)/2 & -5-8a\end{pmatrix}.$$

El centro es un punto (x,y) verificando:

$$(x,y,1)A=(0,0,h).$$

Además tiene que cumplirse que pertenezca a la recta dada: $x-y-2$. Operando, tenemos el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x+\left(\frac{1+a}{2}\right)y+1-a=0\\ \left(\frac{1+a}{2}\right)x+(1+a)y+\left(\frac{1+a}{2}\right)=0\\ x-y-2=0\end{aligned}$$

Podemos suponer $a\neq -1$ (en otro caso la segunda fila de A sería nula y la cónica sería degenerada). De manera que simplificando queda:

$$\begin{aligned} x+\left(\frac{1+a}{2}\right)y+1-a=0\\ x+2y+1=0\\ x-y-2=0\end{aligned}$$

De las dos últimas ecuaciones obtenemos $(x,y)=(1,-1)$ y sustituyendo en la primera $a=1$. La cónica pedida es:

$$x^2+2xy+2y^2+2y-13=0.$$

V.– *En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular, se pide hallar la ecuación de una elipse para la que los dos vértices que pertenecen a un eje son los puntos $(2,1)$ y $(0,-1)$ y que la distancia entre sus dos focos es 4.*

(Examen final, junio 2003)

Sabemos que el centro de la elipse es el punto medio entre los vértices que pertenecen a un mismo eje. En este caso:

$$C=\frac{(2,1)+(0,-1)}{2}=(1,0)$$

Por otra parte

$$2c=4\quad\Rightarrow\quad c=2$$

Además la distancia entre los vértices es:

$$\sqrt{(2-0)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$$

Por tanto:

$$2a=2\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{2}$$

Dado que $a < c$ deducimos que $b^2 = a^2 + c^2 = 6$. La ecuación reducida queda:

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$$

Para calcular la ecuación en la base inicial escribimos las ecuaciones de cambio de base. Teniendo en cuenta que los ejes tienen las direcciones $(2,2)$ y su perpendicular y que conocemos el centro, queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Despejando (x', y') queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y+1) \end{cases}$$

Si substituimos en la ecuación reducida anterior obtenemos la ecuación que buscábamos:

$$x^2 + y^2 + xy - 2x - y - 2 = 0$$

VI.– *En el plano afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular, consideramos la cónica C dada por la ecuación:*

$$x^2 + 4y^2 - 4x = 0$$

(a) *Encontrar la ecuación de otra cónica C' pasando por el punto $(2,1)$, cuyas asíntotas son paralelas los ejes de C y cuyo centro es el $(1, \frac{1}{2})$.*

La cónica que nos dan puede escribirse como:

$$(x-2)^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

Luego es claro que los ejes son:

$$x = 2; \qquad y = 0;$$

En cualquier caso los podemos hallar de manera general como los conjugados de los autovectores asociados a autovalores no nulos de la matriz T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de T son 1 y 4 y los autovectores asociados respectivamente $(1,0)$ y $(0,1)$. Por tanto los ejes quedan:

$$(1,0,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff x - 2 = 0; \qquad (0,1,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff y = 0;$$

Ahora, como las asíntotas de C' son paralelas a estos ejes y pasan por el centro $(1, \frac{1}{2})$, sus ecuaciones son:

$$x - 1 = 0; \qquad y - \frac{1}{2} = 0$$

Escribimos el haz de cónicas conocidas dos asíntotas:

$$(x-1)(y-\frac{1}{2})+\beta=0$$

Imponemos que la cónica ha de pasar por el punto $(2,1)$:

$$(2-1)(1-\frac{1}{2})+\beta=0 \quad \Rightarrow \quad \beta=-\frac{1}{2}$$

La ecuación de la cónica pedida es:

$$(x-1)(y-\frac{1}{2})+\beta-\frac{1}{2}=0 \iff xy-\frac{1}{2}x-y=0$$

(b) *Determinar la ecuación de una parábola que pase por los puntos de corte de C y C'.*

Escribimos el haz de cónicas formado por C y C' ya que todas las cónicas de dicho haz tienen en comun sus puntos de corte. Podemos excluir del haz la ecuación de C' (o la de C) porque no son parábolas:

$$x^2+4y^2-4x+\alpha(xy-\frac{1}{2}x-y)=0 \iff 2x^2+8y^2+2\alpha xy-(8+\alpha)x-2\alpha y=0$$

La matriz de esta cuádrica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \alpha & -(4+\alpha/2) \\ \alpha & 8 & -\alpha \\ -(4+\alpha/2) & -\alpha & 0 \end{pmatrix}; \qquad T=\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 8 \end{pmatrix}$$

Para que sea una parábola ha de cumplirse $det(T)=0$ y $det(A)\neq 0$:

$$det(T)=0 \iff 16-\alpha^2=0 \iff \alpha=\pm 4$$

Pero si $\alpha=4$ la matriz A queda:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -4 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 3 y por tanto es una parábola.

Si $\alpha=-4$ la matriz A queda:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2 y por tanto no es una parábola.

En definitiva la parábola aparece cuando $\alpha=4$ y su ecuación es:

$$x^2+4y^2+4xy-6x-4y=0$$

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VII.– *Hallar la ecuación de una hipérbola una de cuyas asíntotas es la recta $x + 2y - 2 = 0$, la otra asíntota es paralela al eje OY y sabiendo que la polar del punto $(1, 0)$ es la recta $x + y - 3 = 0$.*

Método I: Sabemos que las asíntotas son

$$\begin{aligned} x + 2y - 2 &= 0 \\ x - b &= 0 \end{aligned}$$

para algún $b \in \mathbb{R}$.

Formamos el haz de cónicas conocidas dos asíntotas. Como la cónica pedida es no degenerada podemos escribir el haz como:

$$(x + 2y - 2)(x - b) + \lambda = 0$$

Desarrollando queda:

$$x^2 + 2xy - (2 + b)x - 2by + 2b + \lambda = 0$$

Ahora imponemos que la recta polar de $(1, 0)$ es la recta $x + y - 3 = 0$.

Escribimos la matriz de la cónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(2+b)/2 \\ 1 & 0 & -b \\ -(2+b)/2 & -b & 2b + \lambda \end{pmatrix}$$

La recta polar del punto $(1, 0)$ es:

$$(1, 0, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \iff (1 - \frac{2+b}{2})x + (1 - b)y - \frac{2+b}{2} + 2b + \lambda = 0$$

Imponemos que sus coeficientes sean proporcionales a los de $x + y - 3 = 0$ y obtenemos dos ecuaciones:

$$1 - \frac{2+b}{2} = 1 - b; \qquad \text{y} \qquad -3(1 - b) = -\frac{2+b}{2} + 2b + \lambda$$

Resolviendo el sistema queda $b = 2$ y $\lambda = 1$, y la hipérbola pedida es:

$$x^2 + 2xy - 4x - 4y + 5 = 0$$

Método II: Supongamos que la matriz de la cónica pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que las recta $x + 2y - 2 = 0$ es una asíntota, sabemos que es tangente a la cónica en su punto del infinito, es decir:

$$(2, -1, 0)A(x, y, 1) = 0 \iff (2a - b)x + (2b - d)y + 2c - e = 0 \equiv x + 2y - 2 = 0$$

Como ambas ecuaciones corresponden a la misma recta sus coeficientes son proporcionales y obtenemos dos relaciones:

$$\begin{aligned} 2b - d &= 4a - 2b \\ 2b - d &= -(2c - e) \end{aligned}$$

Por otra parte una recta paralela a OY también es asíntota, luego su punto del infinito pertenece a la cónica:

$$(0, 1, 0)A(0, 1, 0)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$$

Finalmente imponemos que la recta polar en $(1, 0)$ es $x + y - 3 = 0$:

$$(1, 0, 1)A(x, y, 1) = 0 \iff (a + c)x + (b + e)y + (c + f) = 0 \equiv x + y - 3 = 0$$

De nuevo teniendo en cuenta que los coeficientes son proporcionales obtenemos:

$$\begin{aligned} a+c &= b+e \\ -3(a+c) &= c+f \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema formado por las 5 ecuaciones resulta:

$$b=a; \quad c=-2a; \quad d=0; \quad e=-2a; \quad f=5a.$$

La matriz de la cónica es:

$$A=\begin{pmatrix} a & a & -2a \\ a & 0 & -2a \\ -2a & -2a & 5a \end{pmatrix}$$

y tomando $a=1$ corresponde a la cónica obtenida con el método anterior.

(Segundo parcial, mayo 2005)

VIII.– *Calcular la ecuación de una cónica de centro el punto $(0,1)$, tangente a la recta $x+y=0$ en el punto $(1,-1)$ y que tiene por asíntota la recta $y=1$.*

Método I: Consideramos el haz de cónicas conocidas una tangente, el punto de tangencia y una asíntota.

Las cónicas que lo generan son:

1) La formada por la asíntota y la tangente:

$$(x+y)(y-1)=0$$

2) La recta doble que pasa por el punto de tangencia y es paralela a la asíntota (une los puntos de tangencia de ambas si interpetamos la asíntota como tangente en un punto del infinto). Una recta paralela a la asíntota es de la forma:

$$y=c.$$

Imponemos que pase por el punto $(1,-1)$ y deducimos que $c=-1$.

Formamos el haz:

$$(x+y)(y-1)+\lambda(y+1)^2=0 \iff (\lambda+1)y^2+xy-x+(2\lambda-1)y+\lambda=0$$

Imponemos que el centro sea el punto $(0,1)$. La matriz asociada es:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & \lambda+1 & \lambda-1/2 \\ -1/2 & \lambda-1/2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El centro cumple:

$$(0,1,1)A=(0,0,h) \quad \Rightarrow \quad 1/2-1/2=0, \quad \lambda+1+\lambda-1/2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1/4.$$

La cónica queda:

$$3y^2+4xy-4x-6y-1=0.$$

Método II: Sabemos que la cónica buscada es simétrica respecto del centro. Por tanto la recta simétrica a $x+y=0$ por el punto $(0,1)$ es tangente a la cónica buscada en el simétrico de $(1,-1)$. Si llamamos A' a ese simétrico cumple:

$$\frac{A'+(-1,1)}{2}=(0,1) \quad \Rightarrow \quad A'=(0,2)-(1,-1)=(-1,3)$$

La recta simétrica es paralela a la inical:

$$x + y + c = 0$$

Como pasa por A':

$$-1 + 3 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

Ahora consideramos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

Las cónicas que lo generan son:

1) La formada por las tangentes:

$$(x + y)(x + y - 2) = 0$$

2) La recta doble que pasa une los puntos de tangencia de ambas.

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y+1}{3+1} \iff 2x + y - 1 = 0.$$

Formamos el haz:

$$(x + y)(x + y - 2) + \lambda(2x + y - 1)^2 = 0$$

Imponemos que la recta $y = 1$ sea asíntota. Equivalentemente que su punto del infinito, el $(1, 0, 0)$ pertencezca a la cónica. La ecuación dela cónica en coordenadas homogéneas es:

$$(x + y)(x + y - 2t) + \lambda(2x + y - 1t)^2 = 0$$

Como el punto $(1, 0, 0)$ pertence a la misma obtenemos:

$$1 + 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1/4$$

Susyituyendo en la ecuacin y operando llegamos a:

$$3y^2 + 4xy - 4x - 6y - 1 = 0.$$

IX.– *En el plano afín euclídeo y referido a un sistema de referencia rectangular, determinar las cónicas que pasan por $P(0, 2)$ y $Q(0, 4)$, tienen una asíntota paralela a la recta $y - 4x = 0$ y cortan al eje OX en puntos A y B tales que $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 2$.*

(Examen extraordinario, septiembre 1998)

Supongamos que los puntos A y B son respectivamente el $(\alpha, 0)$ y $(\beta, 0)$. La condición $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 2$. significa que $\alpha\beta = 2$.

Consideramos el haz de cónicas pasando por P, Q, A, B:

$$\lambda PQ \cdot AB + \mu PA \cdot QB = 0,$$

es decir,

$$\lambda xy + \mu(2x + \alpha y - 2\alpha)(4x + \beta y - 4\beta) = 0$$

El hecho de tener una asíntota paralela a la recta $y - 4x = 0$ significa que pasa por el punto del infinito $(1, 4, 0)$. Sustituyendo (OJO: por ser punto impropio se eliminan los términos NO cuadráticos):

$$\lambda 1 \cdot 4 + \mu(2 \cdot 1 + \alpha \cdot 4)(4 \cdot 1 + \beta \cdot 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu(-10 - 4\alpha - 2\beta)$$

Tomando $\mu = 1$ y teniendo en cuenta que $\beta = 2/\alpha$ la ecuación queda:

$$8x^2 + 2y^2 - 10xy - (8a + \frac{16}{a})x - 12y + 16 = 0$$

X.– *En el plano afín euclídeo y en un sistema de referencia rectangular, hallar las ecuaciones generales y matriciales de todas las cónicas no degeneradas, que tengan por focos $F(0,0)$ y $F'(2,4)$ y cuya distancia del centro a uno de los vértices es 2.*

El centro de la cónica es el punto medio de los focos:

$$\frac{(0,0)+(2,4)}{2} = (1,2)$$

La distancia de los focos al centro es $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

Distinguiremos dos casos:

(a) Supongamos que la cónica es una elipse.

Entonces con la notación habitual, $c = \sqrt{5}$. Dado que $c > 2$ la distancia del vértice al centro que nos dan corresponde al eje menor de la cónica, y por tanto $b = 2$. Deducimos entonces que $a = \sqrt{b^2+c^2} = 3$.

Para escribir la ecuación utilizaremos la caracterización de la elipse como lugar geométrico: los puntos cuya suma de distancias a los focos es constante. En particular dicha suma es igual a $2a = 6$:

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} = 6 \iff \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} = 6 - \sqrt{x^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado y operando queda:

$$x + 2y + 4 = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

y elevando otra vez al cuadrado:

$$8x^2 + 5y^2 - 4xy - 8x - 16y - 16 = 0$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -8 \\ -4 & -8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(b) Supongamos que la cónica es una hipérbola.

De nuevo con la notación habitual, $c = \sqrt{5}$. Ahora el vértice está sobre el eje focal y así $a = 2$.

Utilizaremos también la caracterización de la hipérbola como lugar geométrico: los puntos cuya diferencia de distancias a los focos es constante. En particular dicha diferencia es en valor absoluto igual a $2a = 4$:

$$|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}| = 4 \iff \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = 4 + \sqrt{x^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado y operando queda:

$$x + 2y - 1 = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

y elevando otra vez al cuadrado:

$$3x^2 - 4xy + 2x + 4y - 1 = 0$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(Examen extraordinario, septiembre 1997)

XI.– *Para cada número real a definimos la cónica de ecuación:*

$$9x^2 + ay^2 - 6axy + 3a - 12 = 0.$$

i) *Clasificar las cónicas dependiendo de los valores de a.*

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3a & 0 \\ -3a & a & 0 \\ 0 & 0 & 3a-12 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 9 & -3a \\ -3a & a \end{pmatrix}.$$

Vemos que:

$$|A| = (3a-12)(9a-9a^2) = 27a(a-4)(1-a), \qquad |T| = 9a - 9a^2 = 9a(1-a).$$

Los puntos donde se anulan son $a = 0, 1, 4$. Estudiamos los siguientes casos:

i) $a < 0$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| > 0$. Se trata de una hipérbola.

ii) $a = 0$. Se tiene que $|T| = 0$ y $|A| = 0$. Se trata de rectas paralelas rales o imaginarias o coincidentes. En particular la ecuación queda:

$$9x^2 - 12 = 0 \iff (3x - \sqrt{12})(3x + \sqrt{12}) = 0.$$

Es decir se tratan de rectas paralelas reales.

iii) $0 < a < 1$. Se tiene que $|T| > 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una elipse real.

iv) $a = 1$. Se tiene que $|T| = 0$ y $|A| = 0$. Se trata de rectas paralelas rales o imaginarias o coincidentes. La matriz asociada queda:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Haciendo congruencia:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

y vemos que de nuevo se tratan de rectas paralelas reales.

v) $1 < a < 4$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| > 0$. Se trata de una hipérbola.

vi) $a = 4$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| = 0$. Se tratan de rectas reales cortándose en un punto.

vii) $a > 4$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una hipérbola.

ii) *En aquellos casos en los que las cónicas sean degeneradas escribir las ecuaciones de las rectas que las forman.*

- Para $a = 0$. La ecuación es:

$$9x^2 - 12 = 0 \iff (3x - \sqrt{12})(3x + \sqrt{12}) = 0.$$

Luego el par de rectas paralelas son:

$$3x - \sqrt{12} = 0, \qquad 3x + \sqrt{12} = 0.$$

- Para $a = 1$. Sabemos que se trata de rectas paralelas a la recta de centros. Esta viene dada por la ecuación:

$$(x, y, 1)A = (0, 0, h) \iff 9x - 3y = 0 \iff 3x - y = 0.$$

Las rectas por tanto son de la forma $3x - y + c = 0$. Por otra parte si intersecamos la cónica con la recta $x = 0$ queda:

$$y^2 = 9 \iff y = \pm\sqrt{9}.$$

Por tanto el punto $(0, 3)$ pertenece a una paralela y $(0, -3)$ a la otra. Deducimos que tales rectas son:

$$3x - y + 3 = 0, \qquad 3x - y - 3 = 0.$$

- Para $a = 4$ el par de rectas cortándose pasa por el centro que cumple:

$$(x, y, 1)A = (0, 0, h) \iff \begin{array}{r} 9x - 12y = 0 \\ -12x + 9y = 0 \end{array}$$

Resolviendo el centro es $(x, y) = (0, 0)$. Cortamos ahora la cónica con la recta $x = 1$ y obtenemos:

$$9 + 4y^2 - 24y = 0$$

de donde:

$$y = 3 \pm 3\sqrt{3}/2$$

Las rectas buscadas pasan por el origen y respectivamente pos los puntos $(1, 3+3\sqrt{3}/2)$ y $(1, 3-3\sqrt{3}/2)$. Quedan:

$$(6 + 3\sqrt{3})x - 2y = 0, \qquad (6 - 3\sqrt{3})x - 2y = 0.$$

(1 puntos)

XII.– *En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, calcular la ecuación de una cónica no degenerada cuyo único eje es la recta* $y = 2x$ *y es tangente a la recta* $y = 0$ *en el punto* $(1, 0)$.

Como es no degenerada y tiene un único eje ya sabemos que es una parábola. Calculemos el simétrico de la tangente con respecto al eje. Para ello hallamos la recta perendicular a este y pasando por $(1, 0)$.

El eje tiene vector director $(1, 2)$. Una recta perpendicular es de la forma:

$$x + 2y + c = 0.$$

Como pasa por $(1, 0)$ obtenemos:

$$1 + 2 \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1.$$

Intersecamos esta recta con el eje:

$$\begin{array}{r} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (1/5, 2/5).$$

Ahora el simétrico P' del punto $P = (1, 0)$ cumple:

$$\frac{P + P'}{2} = (1/5, 2/5) \quad \Rightarrow \quad P' = (2/5, 4/5) - (1, 0) = (-3/5, 4/5).$$

La recta simétrica de $y = 0$ es la que une el punto P' con el origen:

$$4x + 3y = 0.$$

Entonces conocemos dos rectas tangente y sus puntos de tangencia P y P'. Planteamos el haz:

$$\lambda(tg_1 \cdot tg_2) + PP'^2 = 0.$$

Queda:

$$\lambda(y(4x + 3y)) + (x + 2y - 1)^2 = 0 \iff x^2 + (4 + 4\lambda)xy + (4 + 3\lambda)y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

Para hallar el parámetro imponemos que sea una parábola, es decir, el determinante de la matriz de términos cuadráticos ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 + 2\lambda \\ 2 + 2\lambda & 4 + 3\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff 4\lambda^2 + 5\lambda = 0.$$

Aparecen dos soluciones $\lambda = 0$ y $\lambda = -5/4$. La primera queda descartada porque corresponde a una cónica degenerada (recta doble). En definitiva la ecuación pedida es:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 16y + 4 = 0.$$

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

XIII.– *Calcular la ecuación de una elipse tangente a los ejes de coordenadas en los puntos* $(1,0)$ *y* $(0,1)$ *y tangente a la recta* $x+y-2=0$.

Método I: Utilizamos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y puntos de tangencia. Las dos cónicas generadoras son:

- Las dos tangentes: xy.

- La recta doble que une los puntos de tangencia $(1,0)$ y $(0,1)$: $(x+y-1)^2$.

El haz queda:

$$axy + (x+y-1)^2 = 0.$$

Para hallar el parámetro a imponemos que la recta $x+y-2=0$ sea tangente. Al intersecarla con la cónica ha de quedar una raíz doble. Despejamos $y = 2-x$ y sustituimos en la cónica:

$$ax(2-x)+1=0 \iff ax^2-2ax-1=0.$$

Para que la ecuación de segundo grado tenga una única raíz doble el discriminate ha de ser 0:

$$4a^2+4a=0 \iff a=-1 \text{ ó } a=0.$$

Si $a=0$ la cónica es la recta doble y no se trata de una elipse.

Si $a=1$ queda:

$$x^2+y^2+xy-2x-2y+1=0.$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si llamamos T a la matriz de términos cuadráticos vemos que $|T|>0$ y $|A|<0$ y por tanto se trata de una elipse.

Método II: La matriz de la cónica que buscamos es una matriz simétrica 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Imponemos las condiciones que ha de cumplir, para obtener información sobre sus coeficientes.

- La recta $x=0$ es tangente en el punto $(0,1)$:

$$(0,1,1)A(x,y,1)^t=0 \quad \equiv \quad x=0 \iff (b+d)x+(c+e)y+(e+f)=0 \quad \equiv \quad x=0.$$

Obtenemos:

$$c+e=0, \quad e+f=0; \quad \text{ó equivalentemente} \quad c=f, \quad e=-f.$$

- La recta $y=0$ es tangente en el punto $(1,0)$:

$$(1,0,1)A(x,y,1)^t=0 \quad \equiv \quad y=0 \iff (a+d)x+(b+e)y+(d+f)=0 \quad \equiv \quad y=0.$$

Obtenemos:

$$a+d=0, \quad d+f=0; \quad \text{ó equivalentemente} \quad a=f, \quad d=-f.$$

La matriz ahora sabemos que es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} f & b & -f \\ b & f & -f \\ -f & -f & f \end{pmatrix},$$

y la correspondiente cónica:

$$fx^2 + 2bxy + fy^2 - 2fx - 2fy + f = 0.$$

- Finalmente utilizamos que la recta $x + y - 2 = 0$ es tangente. Por tanto al intersecar con la cónica slo ha de haber un punto de corte. Tomamos $y = 2 - x$ y sustituimos en la ecuación de la cónica. Operando queda:

$$2(f - b)x^2 - 4(f - b) + f = 0.$$

Para que tenga una única solución el discriminante ha de ser 0:

$$16(f - b)^2 - 8f(f - b) = 0.$$

Hay dos opciones $f = b$ ó $b = f/2$. Tomando $f = 1$ las correspondientes matrices serían:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero la primera es degenerada, mientras que la segunda es la elipse que buscábamos.

(Segundo parcial, junio 2007)