

2.— En el espacio afín y euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 0, 3)$, las rectas

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0$, $Q : x + 5y - 6z - 4 = 0$.

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(a) Recta paralela a r que pasa por A .

El vector director es el de r , es decir, $(3, 1, 1)$ y pasa por $A(2, -1, 1)$. Por tanto su ecuación continua es:

$$\frac{x-2}{3} = y+1 = z-1$$

(b) Recta que pasa por B y es paralela a P y Q .

Hay que hallar la intersección de las direcciones de los planos P y Q . Para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 0 \\ x + 5y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x = -8z/17$, $y = 22z/17$ y la dirección que buscamos es por tanto la determinada por el vector $(-8, 22, 17)$.

Podemos calcularlo de otra forma. Sabemos que $(3, -2, 4)$ y $(1, 5, -6)$ son los vectores normales (ortogonales) a los planos P y Q respectivamente. Por tanto la dirección que buscamos es perpendicular a ambos y así corresponde al producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -8\bar{e}_1 + 22\bar{e}_2 + 17\bar{e}_3$$

Ahora la recta que buscamos es:

$$\frac{x+1}{-8} = \frac{y}{22} = \frac{z-3}{17}$$

(c) Plano paralelo a P que pasa por A .

Tiene la misma dirección que P y por tanto es de la forma

$$3x - 2y + 4z + \lambda = 0$$

Imponemos que pase por el punto $A(2, -1, 1)$, y obtenemos $\lambda = -12$. El plano buscado es:

$$3x - 2y + 4z - 12 = 0$$

(d) Plano que pasa por B y es paralelo a r y s .

La dirección del plano está generada por los vectores directores de r y s , es decir, $(3, 1, 1)$ y $(1, 2, -3)$. Por tanto el vector normal (perpendicular) del plano será el producto vectorial de ambos:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

El plano será de la forma

$$-5x + 10y + 5z + \lambda = 0$$

Imponiendo que pase por $B(-1, 0, 3)$ queda $\lambda = -20$, y el plano es

$$-x + 2y + z - 4 = 0$$

Otra forma de calcularlo directamente es tomar los puntos (x, y, z) de manera que el vector que los une con B sea linealmente dependiente de los vectores directores:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

(e) *Recta perpendicular a Q y que pasa por A .*

Por ser perpendicular a Q el vector director de la recta es el normal al plano Q , es decir, $(1, 5, -6)$. Por tanto la recta pedida tiene por ecuación:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-6}$$

(f) *Plano perpendicular a s y que pasa por B .*

El vector normal al plano que buscamos será el vector director de s , es decir, $(1, 2, -3)$. La ecuación del plano es de la forma:

$$x + 2y - 3z + \lambda = 0$$

e imponiendo que $B(-1, 0, 3)$ esté en el plano, queda $\lambda = 10$:

$$x + 2y - 3z + 10 = 0$$

(g) *Recta que pasa por A y es perpendicular a r y a s .*

Si la recta es perpendicular a r y s su vector director será el producto vectorial de los vectores directores de r y s . Lo hemos calculado en (d): $(-5, 10, 5)$. La ecuación de la recta buscada es:

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-1}{5}$$

(h) *Plano perpendicular a P y Q y que pasa por B .*

Si el plano es perpendicular a P y Q su dirección está generada por los vectores normales a ambos. El plano buscado viene dado entonces por la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0 \iff -8x + 22y + 17z - 59 = 0$$

(i) *Plano que contiene a r y es perpendicular a P .*

Por contener a r su dirección contiene al vector director de r , $(3, 1, 1)$. Además por ser perpendicular a P su dirección también contiene al vector normal a P , $(3, -2, 4)$. Por último tomamos un punto cualquiera de r que estará también en el plano que buscamos. Por ejemplo $(-1, 2, 0)$. Ahora la ecuación pedida es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff 6x - 9y - 9z + 24 = 0 \iff 2x - 3y - 3z + 8 = 0$$

(j) *Recta que pasa por A , es perpendicular a s y paralela a Q .*

El vector director de la recta pedida es paralelo a la dirección de Q y por tanto perpendicular a su vector normal $(1, 5, -6)$. También es perpendicular al vector director de s , $(1, 2, -3)$. Por tanto podemos tomar como dirección de la recta buscada el producto vectorial de ambos:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$$

La recta buscada es:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-3} \iff x-2 = y+1 = z-1$$

(k) *Recta que contiene a B , es paralela a Q y corta a r .*

Tomaremos un plano π paralelo a Q y que pase por B . La recta que buscamos pasará por B y por el punto de corte de r y π .

Primero calculamos π :

$$x + 5y - 6z + \lambda = 0$$

Imponiendo que pase por B , $\lambda = 19$. Ahora intersecamos tal plano con r . Un punto de r es de la forma $(-1 + 3\mu, 2 + \mu, \mu)$. Ha de verificar la ecuación del plano π :

$$(-1 + 3\mu) + 5(2 + \mu) - 6\mu + 19 = 0$$

Obtenemos $\mu = -14$ y el punto de corte de r y π es $(-43, -12, -14)$. Ahora la recta pedida es la que une este punto con B :

$$\frac{x+1}{-43+1} = \frac{y}{-12} = \frac{z-3}{-14-3} \iff \frac{x+1}{-42} = \frac{y}{-12} = \frac{z-3}{-17}$$

(l) *Recta que corta a r y a s y pasa por B .*

Calcularemos los planos π_1 y π_2 que pasan por r y B y s y B ; la recta pedida es la intersección de ambos.

En concreto la dirección del plano π_1 viene dada por los vectores $(3, 1, 1)$ y $(-1, 2, 0) - B = (0, 2, -3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3$$

Análogamente, la dirección del plano π_2 viene dada por los vectores $(1, 2, -3)$ y $(0, 0, 0) - B = (1, 0, -3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$$

Ahora la dirección de la recta intersección de π_1 y π_2 es el producto vectorial de sus direcciones normales:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -5 & 9 & 6 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9\bar{e}_1 - 23\bar{e}_2 + 27\bar{e}_3$$

Por tanto la recta buscada es:

$$\frac{x+1}{-9} = \frac{y}{-23} = \frac{z-3}{+27}$$

(m) *Recta paralela a la dirección dada por $\bar{v}(1, 1, 2)$ y que corta a las rectas r y s .*

Un punto de r es de la forma $(-1 + 3a, 2 + a, a)$ y uno de s de la forma $(b, 2b, -3b)$. Debemos de fijar dos puntos de manera que el vector que los une sea paralelo a $\bar{v}(1, 1, 2)$:

$$\frac{-1 + 3a - b}{1} = \frac{2 + a - 2b}{1} = \frac{a + 3b}{2}$$

de donde $a = 17/15$ y $b = 11/15$. Por tanto la recta que buscamos pasa por el punto $(11/15, 22/15, -33/15)$ y su ecuación es:

$$\frac{x - 11/15}{1} = \frac{y - 22/15}{1} = \frac{z - 33/15}{2}$$

Otra forma de hallar esta recta es considerar el plano π definido por la dirección \bar{v} y la recta r . Luego intersecamos dicho planos con s y tendremos un punto de la recta que buscamos.

Así la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x + 5y - 2z - 11 = 0$$

Calculamos la intersección con s ; tomamos un punto de dicha recta $(b, 2b, -3b)$. Intersecamos con el plano:

$$-b + 10b + 6b - 11 = 0 \Rightarrow b = 11/15$$

vemos que obtenemos de nuevo el punto calculado anteriormente. Ahora conocido un punto y la dirección la ecuación de la recta que buscamos es inmediata.

(n) *Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.*

Las rectas que pasan por A y son perpendiculares a r , están en el plano que pasa por A y es perpendicular a r . Dicho plano tiene por vector normal el director de r , $(3, 1, 1)$. Así su ecuación será:

$$3x + y + z + \lambda = 0$$

Imponiendo que $A(2, -1, 1)$ verifique la ecuación, obtenemos $\lambda = -6$.

Ahora como la recta que buscamos ha de cortar a s , calculamos la intersección de s con este plano. Un punto de s es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación del plano:

$$3a + 2a - 3a - 6 = 0$$

vemos que $a = 3$. Por tanto la recta que buscamos es la que une los puntos $A(2, -1, 1)$ y $(3, 6, -9)$:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{6+1} = \frac{z-1}{-9-1} \iff x-2 = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-10}$$

(o) *Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.*

Los vectores directores del plano que buscamos son el normal a P , $(3, -2, 4)$ y el director de r , $(3, 1, 1)$. Además ha de pasar por $A(2, -1, 1)$. Por tanto la ecuación pedida viene dada por la anulación del determinante:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -6x + 9y + 9z + 12 = 0 \iff 2x - 3y - 3z - 4 = 0$$

(p) *Perpendicular común a r y s.*

La recta que buscamos esta contenida en los planos π_1 y π_2 definidos por r y s y la dirección perpendicular a ambos respectivamente. Por tanto es la intersección de estos dos planos. Lo que haremos es calcular el plano π_1 e intersecarlo con s para conocer un punto de la recta que buscamos. Calcularemos también la dirección ortogonal a ambas rectas.

La dirección perpendicular a r y s , la obtenemos haciendo el producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

Podemos tomar para simplificar la dirección $(-1, 2, 1)$. Ahora la ecuación del plano π_1 es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x - 4y + 7z + 7 = 0$$

Intersecamos con s . Un punto de esta recta es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación de π_1 :

$$-a - 8a - 21a + 7 = 0 \Rightarrow a = 7/30$$

Por tanto el puntos de intersección de la recta buscada con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. La ecuación de la recta pedida es:

$$\frac{x-7/30}{-1} = \frac{y-7/15}{2} = \frac{z+7/10}{1}$$

(q) *Distancias de A a B, de A a r, de B a P y de r a s.*

La distancia de A a B se obtiene directamente:

$$d(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{14}$$

La distancia de A a r se obtiene mediante la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{\|\overline{AC} \wedge \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|}$$

donde C es un punto de r y v su vector director. En este caso, $C(-1, 2, 0)$, $\bar{v}(3, 1, 1)$.

$$d(A, r) = \frac{\|(-3, 3, -1) \wedge (3, 1, 1)\|}{\|(3, 1, 1)\|} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{143}}{11}$$

Observación: Si no recordamos la fórmula, se puede calcular el plano perpendicular a r pasando por A. La intersección de dicho plano con r nos da un punto M que es la proyección de A sobre r. La distancia pedida es la distancia entre A y M.

La distancia de B a P viene dada por la expresión:

$$d(B, P) = \frac{3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{17}{\sqrt{29}} = \frac{17\sqrt{29}}{29}$$

Observación: De nuevo si queremos reducir el cálculo a la distancia entre dos puntos, hallamos el punto de corte de la recta perpendicular al plano y que pasa por B con el plano P.

Por último para calcular la distancia entre r y s, hallamos el punto de corte de la perpendicular a ambas con alguna de las rectas. Vimos en el apartado (p) que el punto de corte con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. Ahora la distancia pedida es la de este punto a la recta r:

$$d(r, s) = \frac{\|(7/30 + 1, 7/15 - 2, -7/10) \wedge (3, 1, 1)\|}{\|(3, 1, 1)\|} = \frac{5\sqrt{66}/6}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Otra forma es usar directamente la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{\|((-1, 2, 0) - (0, 0, 0), (3, 1, 1), (1, 2, -3))\|}{\|(3, 1, 1) \wedge (1, 2, -3)\|} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

(r) *Ángulos formados por r y s, por s y Q y por P y Q.*

El ángulo formado por r y s es el ángulo formado por sus direcciones:

$$\cos(\alpha(r, s)) = \frac{|((3, 1, 1)(1, 2, -3))|}{\|(3, 1, 1)\| \|(1, 2, -3)\|} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha(r, s) = 80, 72^\circ$$

El ángulo formado por s y Q es el complementario del que forman la dirección normal a Q y la dirección de s. Por tanto:

$$\sin(\alpha(s, Q)) = \frac{|((1, 2, -3)(1, 5, -6))|}{\|(1, 2, -3)\| \|(1, 5, -6)\|} = \frac{29}{\sqrt{14}\sqrt{62}} \Rightarrow \alpha(s, Q) = 79, 84^\circ$$

El ángulo formado por P y Q es el que forman sus direcciones normales:

$$\cos(\alpha(P, Q)) = \frac{|((3, -2, 4)(1, 5, -6))|}{\|(3, -2, 4)\| \|(1, 5, -6)\|} = \frac{31}{\sqrt{29}\sqrt{62}} \Rightarrow \alpha(P, Q) = 43, 02^\circ$$

16.— En el plano afín se considera la circunferencia $c : (x - 3)^2 + y^2 = 3^2$ y la recta $r : y - 3 = 0$. Para cada recta h pasando por el origen, sea A el punto de intersección (distinto del origen) de c y h y B el punto de intersección de r y h . Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos de intersección de la paralela al eje OX por A y la paralela al eje OY por B .

La circunferencia tiene centro $(3, 0)$ y radio 3; la ecuación simplificada es: $x^2 - 6x + y^2 = 0$.

Tomamos una recta arbitraria h pasando por el origen $x = ay$ (notamos que la recta $y = 0$ no hace falta considerarla porque no corta a r).

Hallamos el punto de corte entre c y h .

$$\begin{cases} 0 = x^2 - 6x + y^2 \\ x = ay \end{cases}$$

Queda:

$$a^2y^2 - 6ay + y^2 = 0 \iff y((1 + a^2)y - 6a) = 0$$

de donde $y = 0$ ó $y = \frac{6a}{1 + a^2}$. Nos quedamos con el corte distinto del origen. Como $x = ay$ queda:

$$A = \left(\frac{6a^2}{1 + a^2}, \frac{6a}{1 + a^2} \right).$$

Ahora cortamos r y h :

$$\begin{cases} 0 = y - 3 \\ x = ay \end{cases}$$

Queda:

$$B = (3a, 3).$$

La paralela al eje OX por A es $y = \frac{6a}{1 + a^2}$.

La paralela al eje OY por B es $x = 3a$.

Y la intersección de ambas:

$$x = 3a, \quad y = \frac{6a}{1 + a^2}$$

que son las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico. Para hallar la implícita despejamos el parámetro a en la primera y sustituyimos en la segunda. Queda:

$$y = \frac{2x}{1 + (x/3)^2} \iff y = \frac{18x}{x^2 + 9} \iff yx^2 + 9y - 18x = 0.$$

I.— *En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene el triángulo ABC de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (c, d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.*

Calculemos la ecuación de las tres alturas. Utilizaremos siempre el mismo método. Si conocemos el vector normal (p, q) de una recta su ecuación es:

$$px + qy + r = 0.$$

Para hallar r utilizamos que la recta que buscamos pasa por un punto adicional.

En nuestro caso los vectores normales (perpendiculares) a las alturas son los lados del triángulo, y el punto adicional el vértice opuesto:

- Recta perpendicular a AB y pasando por C . Vector normal $\vec{AB} = (1, 0)$, como pasa por $C = (c, d)$ queda:

$$x - c = 0.$$

- Recta perpendicular a AC y pasando por B . Vector normal $\vec{AC} = (c, d)$, como pasa por $B = (1, 0)$ queda:

$$cx + dy - c = 0.$$

- Recta perpendicular a BC y pasando por A . Vector normal $\vec{BC} = (c-1, d)$, como pasa por $A = (0, 0)$ queda:

$$(c-1)x + dy = 0$$

Ahora podemos concluir de dos formas:

I) Si a la segunda ecuación le restamos la primera, obtenemos la tercera. Por tanto esta está en el haz de rectas formada por las dos primeras y las tres rectas se cortan en el mismo punto.

II) Directamente calculamos la intersección de las dos primeras resolviendo el sistema. Queda:

$$x = c; \quad y = (c - c^2)/d.$$

Y comprobamos que también es un punto de la tercera:

$$(c-1)c + d(c - c^2)/d = c^2 - c + c - c^2 = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

II.— *Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (1, 0, 0), \quad C = (2, 0, 1), \quad D = (1, 1, 1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD .

La ecuación vectorial del plano BCD es:

$$X = B + \alpha \vec{BC} + \beta \vec{BD},$$

es decir:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta).$$

La proyección buscada A' pertenece a ese plano y debe de cumplir que el vector AA' sea perpendicular al mismo; equivalente que sea perpendicular a sus vectores directores. Imponemos estas condiciones:

$$\vec{AA'} \perp \vec{BC} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(1, 0, 1)^t = 0$$

$$\vec{AA'} \perp \vec{BD} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(0, 1, 1)^t = 0$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$4\alpha + 3\beta = -2$$

$$3\alpha + 5\beta = 0$$

y resolviendo el sistema:

$$\alpha = -\frac{10}{11}, \quad \beta = \frac{6}{11}.$$

La proyección pedida es:

$$A' = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta) = \left(\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{4}{11}\right).$$

III.— En el plano afín euclídeo \mathbb{R}^2 sean las rectas $r : x + y = 1$ y $s : x = 3$ y el punto $P = (2, 2)$.

- (i) Hallar la ecuación de una recta t que pase por P de manera que éste sea el punto medio de los puntos de corte de t con las rectas r y s .

Un punto genérico $A = (a, b)$ de la recta r cumple $a + b = 1$ y por tanto es de la forma $A = (a, 1 - a)$.

Un punto genérico $B = (c, d)$ de la recta s cumple $c = 3$ y por tanto es de la forma $B = (3, d)$.

Para que $P = (2, 2)$ sea el punto medio tiene que cumplirse que:

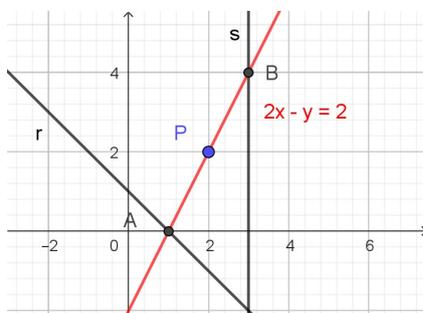
$$P = \frac{A + B}{2} \iff 2P = A + B \iff (4, 4) = (a, 1 - a) + (3, d)$$

de donde:

$$4 = a + 3, \quad 4 = 1 - a + d$$

Resolviendo $a = 1$ y $d = 4$. Por tanto $A = (1, 0)$ y $B = (3, 4)$ y la recta pedida es la que une ambos puntos:

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 0}{4 - 0} \iff 4x - 2y - 4 = 0 \iff 2x - y - 2 = 0.$$



- (ii) Hallar las ecuaciones de una homotecia que lleve el punto P en el origen y cuadruple áreas.

Si k es la razón y cuadruplica áreas significa que $k^2 = 4$. Por tanto $k = \pm 2$ y habrá dos posibles homotecias cumpliendo lo pedido.

Por otra parte si $C = (p, q)$ es el centro de la homotecia, su ecuación es:

$$f(x, y) = (p, q) + k((x, y) - (p, q))$$

Si lleva $P(2, 2)$ en el origen cumple:

$$(0, 0) = (p, q) + k((2, 2) - (p, q)) \iff (2k, 2k) = (k-1)(p, q) \iff (p, q) = \frac{(2k, 2k)}{k-1}.$$

Para $k = 2$ queda:

$$(p, q) = \frac{(2k, 2k)}{k-1} = (4, 4)$$

y la ecuación de la homotecia:

$$f(x, y) = (4, 4) + 2((x, y) - (4, 4)) \iff f(x, y) = (2x - 4, 2y - 4)$$

Para $k = 2$ queda:

$$(p, q) = \frac{(2k, 2k)}{k-1} = (4, 4)$$

y la ecuación de la homotecia:

$$f(x, y) = (4, 4) + 2((x, y) - (4, 4)) \iff f(x, y) = (2x - 4, 2y - 4)$$

Para $k = -2$ queda:

$$(p, q) = \frac{(2k, 2k)}{k-1} = (4/3, 4/3)$$

y la ecuación de la homotecia:

$$f(x, y) = (4/3, 4/3) - 2((x, y) - (4/3, 4/3)) \iff f(x, y) = (-2x + 4, -2y + 4)$$

IV.— En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:

- $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 1)$.

- El vértice D se encuentra en un plano paralelo a la base ABC y que pasa por el punto $P = (0, 10, 9)$.

- El vértice D equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

El volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{3}.$$

El área de la base es la del triángulo ABC :

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|(0, -1, 1)\| = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

La altura es la distancia del punto D a ABC ; pero como el plano que contiene a D y es paralelo a ABC también pasa por $P = (0, 10, 9)$, $\text{dis}(D, ABC) = \text{dis}(P, ABC)$. El plano ABC tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \iff y - z = 0.$$

La altura queda por tanto:

$$h = \frac{|10 - 9|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El volumen pedido será:

$$V = \frac{(\sqrt{2}/2) \cdot (1/\sqrt{2})}{3} = \frac{1}{6}.$$

(ii) *Hallar las coordenadas del vértice D.*

El vértice D se encuentra en el plano paralelo a ABC (cuya ecuación hemos calculado antes $y - z = 0$) y pasando por P . Tal plano es de la forma:

$$y - z + k = 0$$

e imponiendo que pase por P queda $10 - 9 + k = 0$, de donde $k = 1$. Deducimos que el plano que contiene a D tiene por ecuación:

$$y - z - 1 = 0.$$

y por tanto podemos tomar D como:

$$D = (a, b + 1, b)$$

Ahora usamos que el punto D equidista de los otros tres:

$$d(A, D) = d(B, D) \iff \sqrt{a^2 + (b + 1)^2 + b^2} = \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2 + b^2}$$

$$d(A, D) = d(C, D) \iff \sqrt{a^2 + (b + 1)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + (b - 1)^2}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y simplificando queda:

$$0 = 2a - 1$$

$$0 = 4b$$

Obtenemos que $a = 1/2$ y $b = 0$, con lo que $D = (1/2, 1, 0)$.

(iii) *Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano ABC.*

El plano está generado por los vectores $\vec{AB} = (1, 0, 0)$ y $\vec{AC} = (0, 1, 1)$. Un vector perpendicular a ambos es el vector normal al plano ABC , $(0, 1, -1)$. Construimos una base con esos tres vectores:

$$B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}.$$

En esa base la matriz de la simetría es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos un cambio de base:

$$F_C = M_{CB'} F_{B'} M_{CB'}^{-1}.$$

donde:

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de la simetría son (teniendo en cuenta que el origen es un punto fijo de la misma):

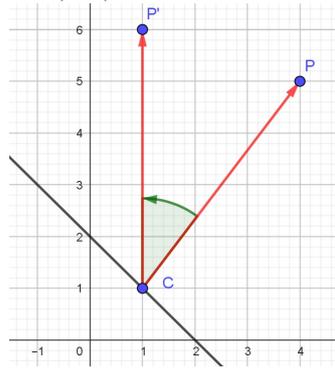
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(iv) *Hallar el simétrico de P respecto de la simetría anterior.*

Simplemente usamos la fórmula hallada en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

V.— En el plano afín \mathbb{R}^2 calcular las ecuaciones de un giro con centro en un punto de la recta $x + y - 2 = 0$ y que lleve el punto $(4, 5)$ en el punto $(1, 6)$.



Dado que un giro conserva las distancias y el centro permanece fijo al girar, el punto $P = (4, 5)$ y su transformado $P' = (1, 6)$ han de equidistar del centro.

Además por pertenecer a la recta $x + y - 2 = 0$ sus coordenadas son de la forma $(a, 2 - a)$. Imponemos que equidiste de $(4, 5)$ y $(1, 6)$:

$$\sqrt{(a - 4)^2 + (-3 - a)^2} = \sqrt{(a - 1)^2 + (-4 - a)^2}$$

Elevando al cuadrado, simplificando y resolviendo se obtiene $a = 1$ y el centro es el punto $C = (1, 1)$.

Ahora las ecuaciones de giro son:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

donde T es la matriz de giro de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} \cos(A) & -\sin(A) \\ \sin(A) & \cos(A) \end{pmatrix}.$$

Dado que lleva el vector $\vec{CP} = P - C = (3, 4)$ en el vector $\vec{CQ} = (0, 5)$:

$$\begin{pmatrix} \cos(A) & -\sin(A) \\ \sin(A) & \cos(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$3\cos(A) - 4\sin(A) = 0, \quad 3\sin(A) + 4\cos(A) = 5$$

Resolviendo:

$$\cos(A) = 4/5, \quad \sin(A) = 3/5$$

y las ecuaciones de giro quedan:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

VI.— En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ z = 5 \end{cases}, \quad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(0, 1, 2).$$

Calcular la distancia entre las rectas r y s .

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$x = a, \quad y = -12 - a, \quad z = 5$$

y su vector director $(1, -1, 0)$; por tanto un punto P de tal recta es de la forma $P = (a, -12 - a, 5)$.

Un punto Q de la recta s es de la forma $Q = (1, 2 + b, 2 + 2b)$.

La distancia $d(P, Q)$ coincide con la distancia buscada $d(r, s)$ cuando el vector PQ es perpendicular a las dos rectas dadas:

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3).$$

Imponemos las condiciones de perpendicularidad. Hay que recordar que para hacer los productos escalares hay que usar la matriz de Gram dada:

$$PQ \perp (1, -1, 0) \iff PQ \cdot (1, -1, 0) = 0 \iff (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3)G_C(1, 1, 0)^t = 0 \iff -7 - 2a - 5b = 0.$$

y

$$PQ \perp (0, 1, 2) \iff PQ \cdot (0, 1, 2) = 0 \iff (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3)G_C(0, 1, 2)^t = 0 \iff 34 + 5a + 29b = 0.$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$a = b = -1$$

Por tanto

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3) = (1 + 1, 14 - 1 - 1, 2(-1) - 3) = (2, 12, -5)$$

La distancia pedida es la norma del vector \vec{PQ} ; recordemos de nuevo usar la matriz de Gram para calcularla:

$$\|PQ\| = \sqrt{(2, 12, -5)G_C(2, 12, -5)^t} = \sqrt{33}.$$

VII.— En el espacio afín y euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano Π corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1, 2, 2)$ forman con el plano Π un ángulo de 60° .

(Segundo Parcial, junio 2003)

El plano que corta a los ejes en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \iff x + y + z - 1 = 0$$

Dado un punto (x, y, z) cualquiera, la recta que lo une a P forma un ángulo de 60 grados con el plano precisamente si el ángulo que forma con el vector normal al mismo es de $90 - 60 = 30$ grados. El vector normal al plano es $(1, 1, 1)$. Por tanto planteamos la siguiente ecuación:

$$\cos(30) = \frac{(1, 1, 1)(x - 1, y - 2, z - 2)}{\|(1, 1, 1)\| \|(x - 1, y - 2, z - 2)\|}$$

Elevando al cuadrado y operando queda la ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8xy - 8xz - 8yz + 22x + 4y + 4z - 19 = 0$$

VIII.— En el espacio afín sean los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 1, 1)$.

- a) Calcular las coordenadas de un tercer punto C en el plano de ecuación $x + z = 2$ de manera que el triángulo ABC sea equilátero. ¿Es única la solución?

Sea $C = (a, b, c)$. Por estar en el plano $x + z = 2$ se cumple $a + c = 2$. Además para que el triángulo sea equilátero tiene que cumplirse que:

$$\begin{aligned} d(A, B) = d(A, C) &\iff \sqrt{(1-0)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2 + (0-c)^2} \iff \\ &\iff 2 = (1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 \\ d(A, B) = d(B, C) &\iff \sqrt{(1-0)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(0-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2} \iff \\ &\iff 2 = a^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2 \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones y simplificando queda:

$$0 = 1 - 2a - 1 + 2c \iff a = c$$

Como además $a + c = 2$ obtenemos $a = c = 1$. Sustituyendo ahora en la primera ecuación:

$$2 = (1-1)^2 + (1-b)^2 + 1^2 \iff (1-b)^2 = 1 \iff b = 0 \text{ ó } b = 2.$$

Hay dos soluciones (la solución no es única):

$$C = (1, 0, 1) \text{ ó } C = (1, 2, 1).$$

- b) Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.

Si llamamos O al origen el volumen pedido es:

$$V = \frac{1}{6} |\det(OA, OB, OC)|$$

Cuando $C = (1, 0, 1)$ queda:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{3}.$$

Cuando $C = (1, 2, 1)$:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = 0.$$

(este volumen 0 se explica por que en este caso el origen está en el mismo plano que contiene al triángulo y por tanto sería una pirámide "degenerada" en el sentido de que el vértice superior está contenido en el mismo plano que la base.)

IX.— En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x = y$.

La ecuación de C es:

$$x^2 + 2y^2 = 4.$$

La ecuación de una recta paralela a $x = y$ es:

$$x = y + c.$$

Intersecamos ambas:

$$(y + c)^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow 3y^2 + 2cy + c^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}.$$

Obtenemos dos soluciones:

$$y_1 = -\frac{c}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}, \quad x_1 = y_1 + c.$$

$$y_2 = -\frac{c}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}, \quad x_2 = y_2 + c.$$

Es decir, las cuerdas cortan en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . El punto medio es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (2c/3, -c/3).$$

Vemos que el lugar geométrico es la recta de ecuación paramétrica:

$$(x, y) = (2c/3, -c/3)$$

o de ecuación implícita $x = -2y$.

Observación. En realidad, de manera más rigurosa, el lugar geométrico pedido no es toda la recta, si no tan solo el segmento que se obtiene cuando el parámetro c varía en el intervalo $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$. En otro caso los valores de y_1 e y_2 no son reales. Geométricamente esto significa que las cuerdas no cortan a la elipse.

(Examen extraordinario, septiembre 2006)

X.— *En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea P el punto de coordenadas $(0, 1)$. Para cada recta r pasando por el punto P , llamamos A y B a los puntos de intersección de r con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de A y B . ¿Qué tipo de curva se obtiene?*

Método I: Consideramos el haz de rectas de puntos pasando por $(0, 1)$. Está generado por dos rectas que pasan por él, por ejemplo, $x = 0$ e $y - 1 = 0$. El haz es de la forma:

$$\lambda x + (y - 1) = 0.$$

(de esta forma excluimos la recta $x = 0$: pero eso no es problema, dicha recta es la única que no corta a la parábola dada en dos puntos por lo que no interviene en la construcción).

Intersecamos la recta con la parábola:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + (y - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda x + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}, \quad y_1 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 + \lambda\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

y

$$x_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}, \quad y_2 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 - \lambda\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = \left(\frac{-\lambda}{2}, 1 + \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-\lambda}{2}, \quad y = 1 + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Para hallar la ecuación implícita del lugar geométrico despejamos el parámetro en la primera ecuación y sustituimos en la segunda. Queda:

$$y = 1 + 2x^2 \iff 2x^2 - y + 1 = 0.$$

Se trata de una cónica de matriz asociada A y de términos cuadráticos T :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) \neq 0$ y $\det(T) = 0$ se trata de una parábola.

Método II: Una recta tiene por ecuación:

$$ax + by + c = 0$$

Imponemos que pase por el punto $(0, 1)$:

$$b + c = 0 \implies c = -b$$

La ecuación queda:

$$ax + by - b = 0.$$

Intersecamos con la parábola dada:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by - b = 0 \\ y = x^2 \end{array} \right\} \implies ax + bx^2 - b = 0 \implies x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_1 = 1 - \frac{ax_1}{b} = 1 - \frac{-a^2 + a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

y

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_2 = 1 - \frac{ax_2}{b} = 1 - \frac{-a^2 - a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = \left(\frac{-a}{2b}, 1 + \frac{a^2}{2b^2} \right)$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-a}{2b}, \quad y = 1 + \frac{a^2}{2b^2}$$

Despejando a en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda queda:

$$y = 1 + \frac{4b^2x^2}{2b^2} = 1 + 2x^2.$$

Ahora concluimos como en el método anterior.

XI.— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta $3x - 4y = 0$ en la recta $y + 3 = 0$ y esté centrado en un punto de la recta $y = 0$.

El centro de giro debe de equidistar de ambas rectas. Por tanto buscamos un punto $P = (a, 0)$ sobre la recta $y = 0$ que equidiste de las otras dos:

$$d(P, 3x - 4y = 0) = d(P, y + 3 = 0) \iff \frac{|3a - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \iff |a| = 5 \iff a = \pm 5.$$

Hay pos posibilidades. Tomamos una de ellas como centro $P = (5, 0)$.

Ahora para saber el ángulo de giro hallamos la proyección ortogonal A de P sobre la recta $3x - 4y = 0$ y la proyección ortogonal B de P sobre la recta $y + 3 = 0$.

El punto A cumple la ecuación de $3x - 4y = 0$ y así es de la forma $A = (4k, 3k)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal:

$$\frac{4k - 5}{3} = \frac{3k - 0}{-4} \iff k = 4/5.$$

Obtenemos $A = (16/5, 12/5)$ y $\vec{PA} = A - P = (-9/5, 12/5)$.

El punto B cumple la ecuación de $y + 3 = 0$ y así es de la forma $B = (m, -3)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal $(1, 0)$:

$$m - 5 = 0 \iff m = 5.$$

Obtenemos $B = (5, -3)$ y $\vec{PB} = B - P = (0, -3)$.

El ángulo de giro α es el que forman los vectores \vec{PA} y \vec{PB} :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{\|\vec{PA}\| \|\vec{PB}\|} = \frac{-36/5}{9} = \frac{-4}{5}.$$

El sentido de giro coincide con la orientación de la base $\{\vec{PA}, \vec{PB}\}$ es decir con el signo del determinante de:

$$\det \begin{pmatrix} -9/5 & 0 \\ 12/5 & -3 \end{pmatrix} = 27/5 > 0.$$

Por tanto:

$$\sin(\alpha) = +\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \frac{3}{5}.$$

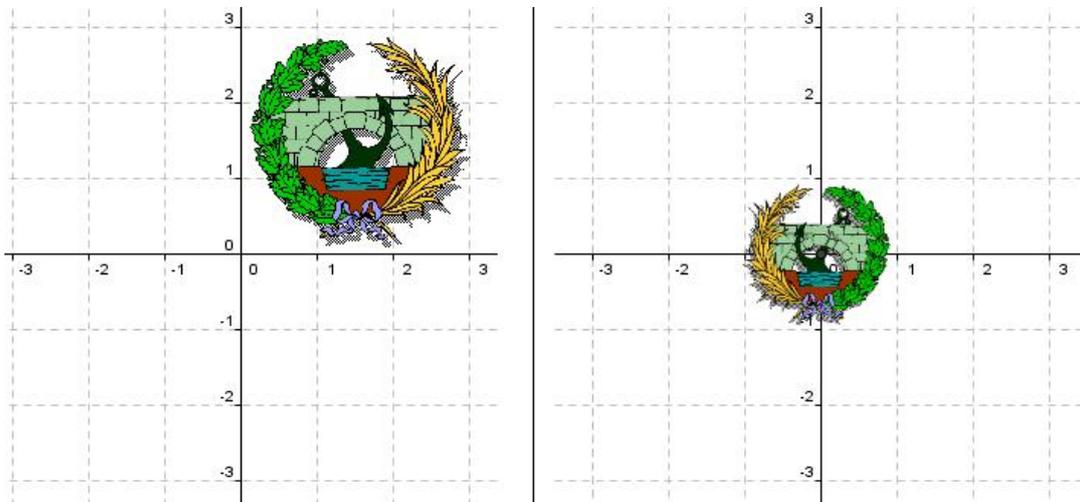
En definitiva las ecuaciones del giro quedan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el ángulo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y \end{pmatrix}.$$

XII.— Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura a la otra.



Dividiremos la transformación en varios pasos.

Observamos que el tamaño de la figura final es $2/3$ el de la inicial. Hacemos una homotecia centrada en el origen y de razón $2/3$.

$$f_1(x, y) = \frac{2}{3}(x, y).$$

Vemos que la figura que queremos obtener es simétrica de la que tenemos ahora respecto de una recta paralela al eje y . Hacemos la simetría respecto de ese eje:

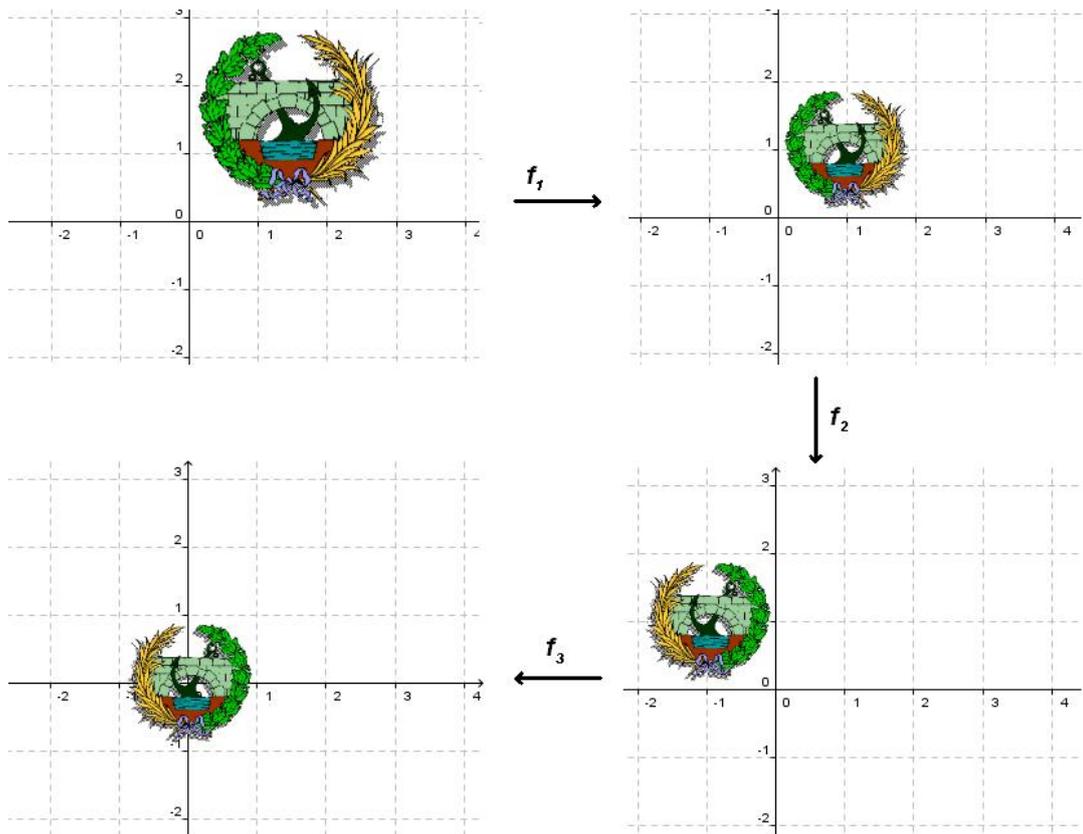
$$f_2(x, y) = (-x, y).$$

Finalmente tenemos que trasladar la figura. El vértice $(-2, 2)$ ha de ser el $(-1, 1)$. Por tanto trasladamos según el vector $(1, -1)$:

$$f_3(x, y) = (x, y) + (1, -1).$$

La transformación pedida es la composición de las tres:

$$f(x, y) = f_3(f_2(f_1(x, y))) = f_3(f_2(2x/3, 2y/3)) = f_3(-2x/3, 2y/3) = (1, -1) + \frac{2}{3}(-x, y).$$



XIII.— Supongamos que escogemos 2011 puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?

Una simetría respecto a $P = (a, b, c)$ tiene por ecuación:

$$f(X) = f(x, y, z) = (a, b, c) - (x - a, y - b, z - c) = (2a, 2b, 2c) - (x, y, z) = 2P - X.$$

Por tanto la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín es $-Id$. Entonces la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín que se obtiene componiendo 2011 simetrías respecto a un punto es $(-Id)^{2011} = -Id$. Deducimos que la composición es de nuevo una simetría respecto a un punto.

Observación: Si los puntos que escogemos son $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2011}$ al ir componiendo obtenemos:

$$\begin{aligned} f_1(X) &= 2P_1 - X \\ f_2(f_1(X)) &= 2P_2 - (2P_1 - X) = 2(P_2 - P_1) + X \\ f_3(f_2(f_1(X))) &= 2P_3 - 2(P_2 - P_1) - X = 2(P_3 - P_2 + P_1) - X \end{aligned}$$

Nos fijamos entonces que la simetría que obtenemos al componer todas las transformaciones es respecto al punto de coordenadas:

$$P_{2011} - P_{2010} + P_{2009} - \dots + P_3 - P_2 + P_1.$$

XIV.— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos $A = (-1, 4)$ y $B = (1, 5)$ respectivamente en $A' = (3, 4)$ y $B' = (5, 3)$. Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

Tenemos en cuenta que el centro de un giro pertenece a la mediatriz del segmento que une un punto con su imagen. Por tanto calcularemos la mediatriz de AA' y de BB' ; la intersección de ambas será el centro de giro.

El punto medio de AA' es:

$$M_1 = \frac{A + A'}{2} = (1, 4).$$

La mediatriz es la recta que pasa por M_1 y tiene como vector normal el $AA' = (4, 0)$:

$$4x + d = 0.$$

Imponiendo que pase por M_1 :

$$4 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -4.$$

Por tanto la mediatriz de AA' es la recta $x - 1 = 0$.

El punto medio de BB' :

$$M_2 = \frac{B + B'}{2} = (3, 4).$$

La mediatriz es la recta que pasa por M_2 y tiene como vector normal el $BB' = (4, -2)$:

$$4x - 2y + c = 0.$$

Imponiendo que pase por M_2 :

$$4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -4.$$

Por tanto la mediatriz de BB' es la recta $2x - y - 2 = 0$.

El centro es la intersección de ambas:

$$\left. \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C = (x, y) = (1, 0).$$

Ahora el giro debe de llevar el vector $CA = (-2, 4)$ en el vector $CA' = (2, 4)$, por tanto el ángulo de giro α cumplirá:

$$\cos(\alpha) = \frac{(-2, 4) \cdot (2, 4)}{\|(-2, 4)\| \|(2, 4)\|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

El sentido de giro es la orientación de la base $B = \{(-2, 4), (2, 4)\}$:

$$\text{signo}(\det(M_{CB})) = \text{signo} \left(\det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right) = \text{signo}(-16) < 0.$$

Se trata por tanto de un giro de centro $(1, 0)$ y ángulo de giro:

$$\alpha = -\arccos(3/5).$$

El seno del ángulo es por tanto:

$$\sin(\alpha) = -\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = -4/5.$$

Las ecuaciones de giro quedan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix}.$$

XV.— En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a \mathcal{R} se tienen las ecuaciones de las rectas r y s :

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s .

En primer lugar hallamos la matriz de Gram respecto de la referencia dada. Sabemos que con respecto a la base:

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$$

la matriz de Gram es la identidad. Tenemos:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Entonces:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = M_{BC}^t M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de la recta r son de la forma:

$$(0, 0, a)$$

Los puntos de la recta s son de la forma:

$$(b, 1, -b)$$

El vector que une ambos es el vector director de las rectas pedidas:

$$(b, 1, -b - a)$$

y ha de ser perpendicular a s , luego:

$$(1, 0, -1)G_C(b, 1, -b - a)^t = 0 \Rightarrow (1, 0, -2)(b, 1, -b - a)^t = 0 \Rightarrow a = -3b/2.$$

La ecuación paramétrica de los puntos que unen:

$$(0, 0, -3b/2), (b, 1, -b)$$

es:

$$\begin{aligned} x &= \lambda b \\ y &= \lambda \\ z &= -3b/2 + b\lambda/2 \end{aligned}$$

Eliminando parámetros queda:

$$\lambda = y; \quad b = x/y;$$

y sustituyendo en la última ecuación:

$$z = -3x/(2y) + x/2 \Rightarrow 2yz + 3x - xy = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)
